

# 线性高光谱解混模型综述

袁 静<sup>1\*</sup>, 章毓晋<sup>1</sup>, 高方平<sup>2</sup>

(1. 清华大学 电子工程系, 北京 100084; 2. 防灾科技学院 信息工程学院, 河北 廊坊 065201)

**摘要:** 高光谱遥感技术具有强大的地物探测能力, 然而, 其空间分辨率低的特点导致光谱图像中存在大量的混合像元, 该现象阻碍了高光谱技术的应用和发展. 针对米级以下的高光谱图像, 线性混合模型能够很好地为混合像元建模. 由于其物理上的可释性以及数学上的可操作性, 作为光谱解混基础的线性混合模型受到了广泛关注, 为高光谱图像的混合像元解混问题提供了重要的解决思路. 然而, 由于观测噪声、环境条件、端元变异性和数据集大小等情况的存在, 线性解混依然是一个具有挑战性的不适定的逆问题. 通过整理近五年的文献资料, 分别从非负矩阵分解、原型分析、贝叶斯方法以及稀疏解混四个方面介绍线性解混数学模型的发展现状以及面临的问题.

**关键词:** 高光谱图像; 光谱解混; 综述; 矩阵分解; 贝叶斯方法; 原型分析; 稀疏解混

**中图分类号:** TP751 **文献标识码:** A

## An overview on linear hyperspectral unmixing

YUAN Jing<sup>1\*</sup>, ZHANG Yu-Jin<sup>1</sup>, GAO Fang-Ping<sup>2</sup>

(1. Dept. of Electrical and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. School of Information Engineering, Institute of Disaster prevention, Lang Fang 065201, China)

**Abstract:** Hyperspectral imaging acquires precise spectral information about the scene radiance that is exploited from efficient earth exploration in remote sensing. However, because of the limited spatial resolution, mixed pixels widely exist in the obtained hyperspectral data. It severely hinders the application of hyperspectral data. Hence, hyperspectral unmixing (HU) has become an essential task for HSI analysis. The most commonly model used for the mixture formation is a linear process or non-linear process. As linear mixing model (LMM) has clear physical meaning and is amenable to mathematical treatment, it has received widespread attention. To tackle the unmixing challenge, a number of linear algorithms have been proposed effectively. However, unmixing is a challenging, ill-posed inverse problem because of observation noise, environmental conditions, endmember variability, and data set size. The paper provided a comprehensive review of the state-of-the-art model in spectral unmixing. These models are discussed according to the following four categories: matrix decomposition, archetype analysis, bayesian method and sparse regression. In addition, both advantages and defects of these models are presented. Finally, a perspective on future research directions for advancing spectral unmixing methods is offered.

**Key words:** hyperspectral image, unmixing, overview, matrix factorization, bayesian method, archetype analysis, sparse regression

**PACS:** 89.70.-a

## 引言

20 世纪 80 年代以来, 高光谱遥感技术成为综

合对地观测的重要组成部分, 也是国际对地观测技术竞争的制高点之一. 过去十年来, 国际权威期刊上发表的关于高光谱遥感信息处理与应用的文献数量

收稿日期: 2018-01-05 修回日期: 2018-02-26

Received date: 2018-01-05 revised date: 2018-02-26

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61673234, U1636124)

Foundation items: Supported by the National Natural Science Foundation of China (61673234, U1636124)

作者简介 (Biography): 袁 静 (1981-), 女, 河北石家庄人, 清华大学博士研究生, 从事计算机视觉、遥感图像处理、高光谱解混方面的研究.

\* 通讯作者 (Corresponding author): E-mail: yuanjing20110824@sina.com

以每年 15 % 的速度递增<sup>[1]</sup>. 可见针对高光谱遥感图像的研究工作越来越受到广泛关注. 高光谱遥感图像将反映物质辐射的光谱信息与反映物质二维空间的图像信息集于一体, 实现了“图谱合一”, 如图 1 所示. 忽略大气因素的影响, 高光谱图像中的每个像元可以看作是视场中的物质在数十个甚至数百个连续波段的电磁波信号下的综合表现. 在 400 ~ 2 500 nm 的波长范围内其光谱分辨率一般小于 10 nm. 高光谱图像具有波段多、光谱范围窄和波段连续等特点, 极大地增强了其探测物质属性信息的能力, 使得高光谱技术在发展初期广泛应用于对地观测<sup>[2]</sup>. 近年来, 在环境监测等领域的使用也越来越普遍<sup>[3-11]</sup>. 然而, 高光谱图像的空间分辨率较低, 导致了每个像元可能同时包含了多个基本地物的光谱信息. 该像元被称为混合像元. 大量混合像元的存在阻碍了高光谱图像分析技术的应用及发展. 因此, 从混合像元中提取基本地物和计算各个基本地物在混合像元中所占的比例成为了高光谱图像分析的关键预处理技术, 被称为高光谱解混. 提取混合像元中包含的基本地物被称为端元提取; 计算每种基本地物所占的比例(丰度)被称为丰度估计或丰度反演<sup>[12]</sup>.

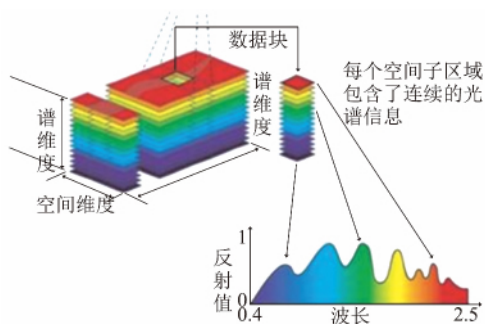


图 1 光谱图像<sup>[2]</sup>  
Fig. 1 hyperspectral remote sensing image<sup>[2]</sup>

高光谱解混的算法依赖于场景混合模型的建立. 混合模型用以描述场景中的物质如何相互作用并形成像元内的合成光谱. 现有的混合模型主要有线性模型与非线性模型. 大尺度的光谱混合通常被认为是一种线性混合, 而小尺度的光谱混合经常被认为是非线性混合<sup>[12]</sup>. 线性混合模型如图 2 所示: 地表有三种物质  $m_1, m_2, m_3$ , 太阳入射光只与一种地表物质发生作用, 地表物质之间并无相互作用, 每个光子只能“看到”一种物质并按照  $a_1, a_2, a_3$  的比例叠加到相机的传感器上<sup>[2]</sup>. 当图 2 中的条件不满足时, 非线性混合效应将显现出来, 如图 3 所示.

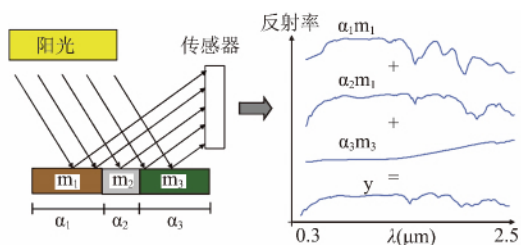


图 2 线性混合<sup>[2]</sup>  
Fig. 2 linear mixing model<sup>[2]</sup>

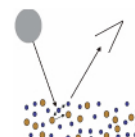


图 3 非线性混合<sup>[2]</sup>  
Fig. 3 nonlinear mixing model<sup>[2]</sup>

本文从权威会议和期刊共收集到了参考文献 100 多篇, 这些文献涵盖了近五年线性光谱解混模型的有关内容. 可见, 线性光谱解混模型依然是国内外研究的热点. 分析其原因: (1) 线性光谱混合模型具有简单、效率高以及物理意义明确的优点; (2) 对于米级以下空间分辨率的高光谱图像, 线性光谱混合模型能更好地描述实际光谱混合现象<sup>[13]</sup>.

光谱解混的研究工作已经开展了 30 余年. 涉及到最新的光谱解混的综述文献共有 8 篇. 均从不同的角度对光谱技术进行了比较完善的总结和整理, 这些文献在线性光谱解混方面的综述工作存在一些不足, 如表 1 所示.

### 1 线性混合模型

线性混合模型(Linear Mixing Model, LMM): 光谱图像中的每个像素点是由若干个端元的谱线性组合而成. 如图 4 所示: 设  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^{L \times K}$  是  $K$  个像素  $L$  个波段下的光谱图像,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in R^{L \times N}$  为含有  $N$  个端元的端元谱库,  $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为第  $i$  个端元的  $L$  个波段的光谱. 线性混合过程可描述为:

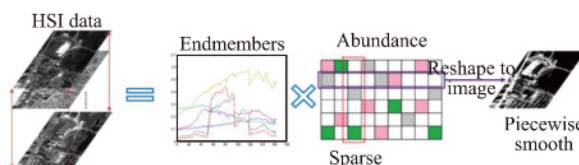


图 4 线性光谱解混<sup>[43]</sup>  
Fig. 4 linear hyspectral unmixing<sup>[43]</sup>

表 1 涉及到光谱解混的综述文献

Table 1 reviews including hyperspectral unmixing

作者	年份	优势	缺点
Bioucas Dias 等 <sup>[2]</sup>	2012	1986 年到 2011 年的线性光谱解混技术包括几何方法、统计学方法和稀疏解混方法等内容.	没有介绍原型分析、贝叶斯方法、深度 NMF 方法等最新的解混技术
Heylen R 等 <sup>[14]</sup>	2014	近 20 年的非线性解混模型和算法. 其内容包括双线性模型、稠密矿物质解混模型、光线跟踪模型、神经网络模型、核方法、支持向量机技术、流形学习方法、分段线性化方法等非线性解混技术	仅关注了 2014 年前的非线性解混模型.
Shi C 等 <sup>[15]</sup>	2014	阐述了 2012 年前的融合空间信息和谱间信息的光谱解混模型	没有介绍原型分析、贝叶斯方法、深度 NMF 方法等最新的解混技术.
张兵 等 <sup>[12]</sup>	2016	在综述高光谱图像处理与信息提取方面的关键问题的内容中, 简明扼要的阐述了 2014 年前的 35 篇线性混合像元分解的文献内容. 重点介绍了优化方法.	文献较陈旧数量不足, 未给出解混技术的详细分类以及各技术的优缺点.
张良培 等 <sup>[11]</sup>	2016	在综述基于稀疏表示理论的高光谱图像处理与分析方法中提及了 12 篇 2011 年以后稀疏半监督解混技术, 并针对技术的优缺点给出了说明.	关注了 12 个稀疏解混的解混技术, 没有涉及原型分析、贝叶斯方法、深度 NMF 方法等最新的解混技术
Wang L 等 <sup>[16]</sup>	2016	在综述空间信息在遥感图像分类与解混技术的应用时, 提及融入空间信息的光谱解混技术, 其内容侧重于端元提取, 在丰度估计部分的综述部分涉及的文献数量仅 17 篇.	关于线性解混的文献数量不足. 其中 2012 年以后的文献数量是 6 篇.
张莹彤 等 <sup>[17]</sup>	2017	综述整理目前光谱数据库的建设进展与应用领域.	未关注线性光谱解混的最新进展.
杨斌 等 <sup>[18]</sup>	2017	介绍了近年来非线性光谱解混方法的发展状况.	未关注线性光谱解混的最新进展

$$Y = \theta W + E \quad (1)$$

其中  $E$  代表高斯噪声. 为了表述方便, 全文中的  $Y$  表示观测光谱矩阵,  $\theta$  为端元谱矩阵,  $W$  为丰度矩阵,  $E$  表示噪声矩阵. 光谱解混由两部分组成: 端元提取和丰度估计.

本文将线性解混方法分为五类: 几何方法、非负矩阵分解方法、原型分析方法、贝叶斯方法和稀疏解混方法. 通常, 几何方法将单纯形的顶点看作端元. 因此, 其主要用来做端元提取. N-FINDR<sup>[19]</sup> 和顶点分量分析 (Vertex Component Analysis, VCA)<sup>[20]</sup> 是最流行的几何方法. 虽然这些方法简单快捷, 但是需要光谱数据满足纯端元的假设, 这种假设在实际工程领域通常是不存在的, 因此, 近年来关于几何方法的解混工作基本上属于停滞状态, 所以, 本文将不再介绍该项工作的研究情况.

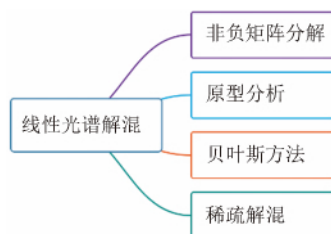


Fig. 5 survey contents

本文的综述脉络如图 5 所示. 主要从四个方面综述线性光谱解混内容: 非负矩阵分解 (Nonnegative Matrix Factor, NMF)、原型分析 (Archetypal Analy-

sis, AA)、贝叶斯方法 (Bayesian Method, BM) 以及稀疏解混 (Sparse Unmixing, SU). (1) 非负矩阵分解, 又分为浅层非负矩阵分解和深层非负矩阵分解. 基于浅层 NMF 的光谱解混的目标是利用各种先验信息通过一次非负矩阵分解实现光谱解混. 深度 NMF 的光谱解混方法是受深度学习启发而开展的一项探索式的尝试和研究. 非负矩阵分解能同时实现提取端元和丰度估计的功能. (2) 原型分析的目标是通过构造原型分解模型克服 NMF 在光谱解混过程中出现的非凸问题. 该部分将从基本原型分析、基于核函数的原型分析以及深度原型分析三个方面进行简要概述. 原型分析能同时实现提取端元和估计丰度的功能. (3) 贝叶斯方法的目标是通过构造端元和丰度的最大后验概率完成光谱解混. 将分别从似然函数、丰度先验、端元先验以及空间信息先验四个方面进行整理、分类和比较. 贝叶斯方法能同时实现端元提取和丰度估计的功能, 也能在端元已知的情况下, 仅实现丰度估计. (4) 稀疏解混的目标是在端元谱库已知的情况下, 采用回归技术估计丰度. 该部分将从拟合误差、丰度先验和结构先验三个方面进行整理. 该部分内容与基于稀疏丰度约束的非负矩阵分解的内容非常相似, 所不同的是稀疏解混仅仅用来估计丰度, 其参考文献均来自稀疏解混的研究领域.

## 2 基于非负矩阵分解的光谱解混

给定观测光谱  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_K) \in R^{L \times K}$ , 求解

端元矩阵  $\theta$  和丰度矩阵  $W$  的问题转变为公式 1 的逆问题. 根据矩阵分解原理, 观测光谱矩阵可被拆解为端元矩阵和丰度矩阵的乘积. 又根据物理含义, 端元矩阵  $\theta$  和丰度矩阵  $W$  需满足非负性要求. 因此, NMF 适用于光谱解混. 从数学角度看, 实际工程中端元的数量  $N$  远远小于波段数  $L$ , 该现象必将导致非负矩阵分解存在无穷多的解. 因此, 基于 NMF 的线性光谱解混方法的工作重点是研究如何能克服其解不唯一的缺陷. 本章从两个方面归纳这些改进方法, 如图 6 所示: (1) 对观测矩阵只进行一次非负矩阵分解, 并在分解过程中增加先验信息约束(浅层非负矩阵分解), 其先验信息分别来自端元、丰度和结构. 端元的先验一般分为光滑性先验、单纯形先验和谱变异先验; 丰度先验一般分为光滑性先验和稀疏性先验; 结构先验包括局部和非局部结构信息. (2) 对观测矩阵进行多次非负矩阵分解(深度非负矩阵分解) 以克服其解不唯一而导致的问题<sup>[21]</sup>.

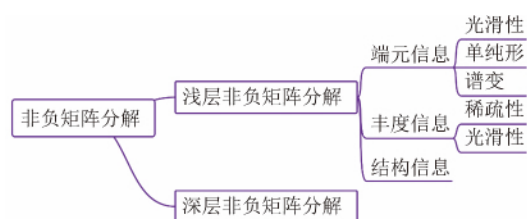


图 6 基于非负矩阵分解的综述脉络

Fig. 6 contents of the NMF

值得注意的是: 近两年来, 有研究者直接对高光谱图像进行了简便、快捷地预处理操作, 降低了谱变异对光谱解混的不良影响. 将高光谱图像分解为低秩矩阵和稀疏矩阵. 其中, 低秩矩阵可以表示固有的光谱特征, 稀疏矩阵中含有谱变异信息. 并通过对高光谱图像进行低秩矩阵估计减小光谱变异对光谱解混的影响<sup>[22]</sup>. 另外, 利用不稳定指数(Instability Index, ISI)<sup>[24]</sup> 选择稳定的波段信息, 亦能够消减谱变异对光谱解混的影响<sup>[23]</sup>. 其他关于谱变异的解混方法在非负矩阵分解的端元先验模型中以及贝叶斯解混方法的端元先验模型中均有所体现.

## 2.1 浅层非负矩阵分解

浅层非负矩阵分解指的是在光谱解混中仅进行一次非负矩阵分解的方法. 通常丰度矩阵  $W$  需要满足两个约束: 矩阵  $W$  的所有元素非负(Abundance Nonnegativity Constraint, ANC) 和列向量的和为 1 (Abundance Sum Constraint, ASC)<sup>[2]</sup> 其数学表达为

$$W \geq 0 \quad \mathbf{1}_N^T W = \mathbf{1}_K^T \quad (2)$$

则基于 NMF 的光谱解混模型被定义如下:

$$\operatorname{argmin}_{\theta, W} \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 \quad (3)$$

$$\text{s. t. } W \geq 0 \quad \theta \geq 0 \quad \mathbf{1}_N^T W = \mathbf{1}_K^T$$

为了进一步缩小 NMF 的解空间, 获得具有明确物理含义的解混结果, 需要增加丰富的先验信息进行分解约束<sup>[25]</sup>. 本节归纳的先验信息主要包括: 端元信息、丰度信息和结构信息.

### 2.1.1 端元信息

#### (1) 光滑性

观察图 4 发现端元谱在局部是光滑的. 最初通过为端元矩阵施加 F 范数约束表示光滑性特征<sup>[26]</sup>. 这种“光滑”约束, 容易破坏端元光谱的急剧变化情况, 损坏其光谱形状, 影响端元提取. 因此, 通过最小化端元光谱的方差对光滑性进行约束可以有效改进上述方法中存在的问题<sup>[27]</sup>. 另一方面, 实际场景中不同的地物通常有不同的光谱. 而相同的地物一般具有相似的光谱, 这种相似性主要体现在光谱的吸收特征上. 大多数现有的光谱相似性测量, 例如光谱角度图(Spectral Angle Map, SAM) 和相关系数(Correlation Coefficients, COR) 均没有考虑光谱的吸收特征. 通常不同位置或不同尺度的吸收特征可以通过相应的小波系数反映出来. 采用小波频谱加权表示光滑特征具有较好的稳定性<sup>[28]</sup>.

#### (2) 单纯形

端元是由光谱数据构成最小体积的单纯形的顶点. 最初采用端元谱矩阵的行列式表示单纯形的体积<sup>[29]</sup>. 由于个别端元谱库中存在某个波段的光谱被移除的现象, 在约束单纯形体积最小的基础上通过增加异常点模型以克服上述不连续问题<sup>[30]</sup>. 进一步观察端元谱数据发现<sup>[27, 31]</sup>: 端元倾向于最小单纯形的顶点, 该特征被称为紧凑性特征. 找到一个最小体积的单纯形的本质是找到一个尽可能紧凑的单纯形. 该紧凑性特征通过最小化每个端元与端元质心之间的距离进行表示. 虽然端元是包含所有观测像元向量的最小单纯形的顶点, 但是, 只有当这些向量彼此不同时, 才能形成可包含所有观测像元向量的单纯形, 该特征被称为“端元差异”<sup>[32]</sup>, 并采用谱信息散度<sup>[33]</sup> 对其进行表示. 该散度值越小意味着两个谱之间越相似. 反之, 意味着谱之间差异越大. 此外考虑到端元谱之间不仅仅存在差异性, 同样存在相似性, 可采用流形刻画端元谱之间的相似和相异信息<sup>[34]</sup>.

#### (3) 谱变异性

传统观点认为端元谱不具有变异性. 然而, 这种假设对于实际数据集通常不适用, 原因是: 材料的辐射或反射率可能会随着环境的变化而发生显著变化, 例如, 环境、光照、大气和时间变化等, 均可能导致估计误差在整个解混过程中传播<sup>[35]</sup>. 因此, 光谱变异性引起了人们的广泛关注. 本节将介绍基于 NMF 框架的光谱变异性模型. 实际工程中, 有些谱变异是由于可加性扰动破坏了原有的纯端元谱而导致的, 可采用干扰矩阵对这类谱变异进行建模<sup>[36]</sup>. 在最小体积约束 NMF (Minimum Volume Constrained NMF, MVCNMF)<sup>[37]</sup> 的基础上建立扰动 LMM 模型 (Perturbed LMM model, PLMM)<sup>[36]</sup>. 其缺点是物理含义不明确. 考虑到每个像元中的端元可能都存在变异, 通过用对角矩阵乘端元的方法有效地模拟由光照影响的反射率的变化. 该模型被称为扩展的线性混合模型 (Extended Linear Mixing Model, ELMM)<sup>[38]</sup>, 其物理机理明确. 然而, 由于 ELMM 模型假设所有波长都是固定的缩放比例, 当端元受到更复杂环境的影响而导致其光谱失真时, 缺乏必要的灵活性. 例如, 在不同条件下对植被光谱的实验测量显示了光谱变化对波长间隔的显著依赖性<sup>[39, 40]</sup>. 在 ELMM 模型的基础上考虑了每个波长间隔的光谱变异, 采用依波段的比例因子使新模型能适应端元光谱的任意变化. 该模型被称为广义线性混合模型 (Generalized Linear Mixing Model, GLMM)<sup>[35]</sup>.

非负矩阵分解中的端元先验综述结论如图 7 所示.

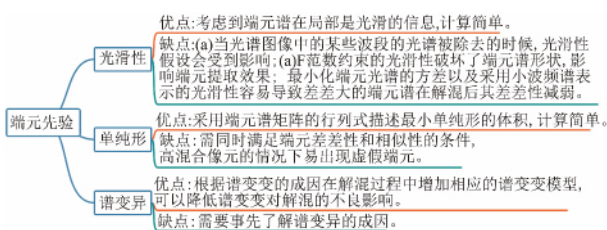


图 7 非负矩阵分解中的端元先验综述结论  
Fig. 7 summary of the endmembers based on NMF

### 2.1.2 丰度信息

通常情况下, 端元谱库的端元数量远远多于混合像元中包含的端元的数量, 因此, 其丰度具有稀疏性特征<sup>[41]</sup>. 其次, 两个相邻像元含有某相同端元的比例非常相似, 因此, 丰度矩阵的行具有分段光滑性特征<sup>[42]</sup>. 图 4 中的丰度矩阵的行和列进一步说明了丰度的稀疏性和光滑性<sup>[43]</sup>.

#### (1) 稀疏性约束

含稀疏性约束的 NMF 解混模型如下:

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmin}_{\theta, W} \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \|W\|_0 \\ & \text{s. t. } W \geq 0 \quad \theta \geq 0 \quad \mathbf{1}_N^T W = \mathbf{1}_K^T \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\|W\|_0$  表示矩阵的 0 范数, 用来刻画稀疏性能. 该模型中的  $\ell_0$  范数具有非凸性, 使得求解模型的难度增加. 在 (Restricted Isometry Property, RIP) 条件下,  $\ell_1$  范数可以代替范数<sup>[44]</sup>; 因此, 将式 (4) 进行改进后的模型如下<sup>[42]</sup>:

$$\begin{aligned} & \operatorname{argmin}_{\theta, W} \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \|W\|_1 \\ & \text{s. t. } W \geq 0 \quad \theta \geq 0 \quad \mathbf{1}_N^T W = \mathbf{1}_K^T \end{aligned} \quad (5)$$

$\ell_1$  范数具有良好的凸性, 使得公式 (5) 能够获得全局最优解. 但是,  $\ell_1$  范数不具有完全的可加性约束<sup>[43]</sup>, 实验证明  $\ell_{0.5}$  比  $\ell_1$  范数更接近真实的稀疏解<sup>[45, 46, 47, 48]</sup>, 且计算效率更高.  $\ell_{0.5}$  范数的迭代自适应更新算法<sup>[49]</sup>, 进一步提升了计算效率; 将  $\ell_{0.5}$  范数的自适应参数方法应用于光谱解混, 能够改善稀疏效果, 提高解混效率<sup>[50]</sup>; 将  $\ell_{0.5}$  范数进一步推广到  $\ell_q (0 \leq q < 1)$  范数, 通过实验发现当信号的信噪比 (Signal Noise Ratio, SNR) 较低且稀疏性较高时,  $\ell_q$  范数比  $\ell_1$  范数更有助于提高光谱解混的精度<sup>[51]</sup>. 但, 如何自适应地选择  $q$  值甚为关键. 基于数据引导的  $q$  自适应选择方法能有效地解决上述问题<sup>[52]</sup>. 然而,  $\ell_q$  范数在  $q=0$  处是不可微的, 其数值误差会影响精度和收敛性. 为了改善  $\ell_q$  范数的解的不稳定性, 提高对噪声的鲁棒性, 采用  $\arctan$  函数表达稀疏并代替  $\ell_0$  范数, 取得了较好的效果<sup>[53]</sup>. 此外, 由于同一个端元仅仅分布在个别像元中, 说明丰度的行和列均具有稀疏性. 并通过为丰度矩阵施加  $\ell_{21}$  范数约束来表达该稀疏性特征<sup>[54]</sup>. 进一步考虑局部空间信息, 发现相邻区域的丰度具有较强的相似性, 通过采用权重表示空间相邻信息, 同时将其施加给稀疏项, 以获得更为鲁棒的稀疏解<sup>[31, 55, 43]</sup>. 另一方面, 高光谱图像通常非常大, 由于硬件的存储空间有限, 提升传统算法的计算效率的难度大大增加. 分布式稀疏高光谱分解算法为提高解混效率开辟了新的途径<sup>[56]</sup>.

当存在高度混合像元和极高相似端元谱的情况下, 稀疏性先验无法实现准确地光谱解混效果.

#### (2) 光滑性

地面物体的平滑变化意味着光谱图像中很少发生突变, 这说明丰度的光滑性是大多数自然地表的固有属性, 被视作空间的相关性. 考虑到相同地物的像元的丰度变化缓慢, 可采用计算该像元的丰度与

其邻域的平均丰度的差表达其平滑性<sup>[57]</sup>. 同时考虑到不同的端元谱之间存在弱相关并用 K-L 散度 (Kullback-Leibler Divergence, KLD) 对其进行表示, 该约束避免了过度平滑, 并保持了相似地物的内在多样性. 此外, 丰度的光滑性可由丰度的差分进行表示, 差分越小光滑性越强. 进一步分析: 空间区域中含有纯端元的像元出现在相同地物上的可能性较大, 这意味着该地物的光滑性强; 而混合像元中可能存在于包含两个或更多不同的地面覆盖物的过渡区域, 表明此区域的光滑性弱. 加权的光滑性约束方法可以为上述先验建模<sup>[58, 59]</sup>. 再者, 从丰度矩阵的行视角来看, 某材质的丰度图是分段平滑的, 采用全变差信息 (Total Variation, TV) 表示其分段的平滑性<sup>[43]</sup>. 若将丰度看作一副灰度图, TV 表达的是行列梯度之和. TV 正则化方法被视为对丰度图进行了去噪处理, 提高了对噪声的鲁棒性. 另外, 实际的光谱图像中的地物由不同类别的对象组成, 每一种地物都有其特有的主要分布区域, 这导致了丰度变量具有分散性. 该分散性特征揭示了每个端元对应的丰度变量似乎是相互独立的. 然而, 独立假设在 LMM 中被 ASC 减弱, 这表明混合像元造成了不同物体的丰度之间存在一定的弱相关性. 可用互信息表示不同丰度之间“弱相关”特征<sup>[59]</sup>, 并用 K-L 散度<sup>[60]</sup> 对互信息进行表示.

丰度的光滑性先验导致在过渡区域容易出现过平滑现象, 虽然能够通过加权的方式进行改进, 但依然无法彻底解决该问题.

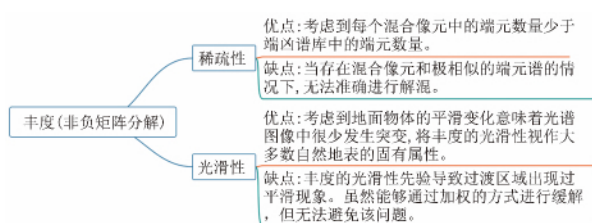


图 8 非负矩阵分解的丰度先验综述结论

Fig. 8 summary of abundance information based on NMF

### 2.1.3 结构信息

空间信息可以有效地表示同质性区域(含相同地物)以及过渡性区域(含不同地物), 根据万物皆有关系的思想, 距离近的关系更加紧密, 距离远的关系愈疏远, 将距离作为权重约束丰度之间的关系以更准确地对丰度进行估计, 并得到了更鲁棒的光谱解混结果<sup>[61]</sup>. 按照该思路, 每个像元可以被其空间邻近像元线性重构, 该结构被称为流形结构, 并通过

图模型理论将其嵌入到 NMF 模型, 以保持数据的局部几何结构, 使高相似性的相邻像元可以联合在一起实现解混<sup>[62-66]</sup>. 在此基础上, 将光谱空间中的内在流形与空间数据一致性约束相结合, 采用双图正则稀疏 NMF (Double Graph Non-negative Matrix Factorization, DGNMF) 提高了解混精度<sup>[67]</sup>. 由于单图模型只能简单表示两个像元之间的关系, 而超图模型能够为多个像元之间的高阶关系建模, 采用超图模型更准确地表达空间相似和光谱相似的关系. 在超图模型中, 每个顶点表示光谱数据中的一个像元, 多个像元之间的关系用超边表示, 该模型将空间域-光谱域的联合结构作为正则项纳入模型中, 以强化处在同一超边的像元丰度的一致性<sup>[68]</sup>. 此外, 超图的超边结构和相应的权重可以鲁棒地表示空间相邻像元之间的相似关系, 降低了噪声对解混结果的影响. 上述思想是基于局部邻域信息, 在实际光谱图像中, 同一个物质不仅仅分布在某一个局部区域, 亦有可能分布在整个视场中, 并通过采用物质依赖约束对该现象进行建模. 其原理是某像元的光谱是由相似像元的光谱线性组合而成, 相应的该像元的丰度是由相似端元的丰度线性组合而成. 组合系数呈现稀疏性特征<sup>[48]</sup>. 按照该思路, 若原始光谱图像中存在若干个同质区域, 则处于同一个同质区域的像元的丰度值相近, 而处于不同的同质区域的像元丰度值差别大, 则在解混过程中加入同质区域的相似特征与相异特征, 能够改善解混效果<sup>[55]</sup>. 与其类似, 可对原有的高光谱数据集进行聚类, 使用聚类标签强化相似性和相异性特征. 若像元属于相同的类, 其丰度权重设为 1, 否则设为 -1, 并将该权重纳入光谱解混的数学模型中, 提高了解混精度<sup>[69]</sup>. 另一方面, 考虑到基于 NMF 的光谱解混模型将每个波段的光谱数据拉成了一维向量导致空间信息丢失严重. 虽然, 出现了各种基于空间信息的 NMF 解混方法, 但其空间信息利用不够充分. 而三阶张量的数据结构不失真地保存了空间信息, 更适合高光谱数据<sup>[70]</sup>. 由典型多态分解 (Canonical Polyadic Decomposition, CPD)<sup>[71]</sup>、Tucker 分解 (Tucker Decomposition, TD) 以及 BTD 分解 (Block Term Decompositions, BTD)<sup>[72]</sup> 相结合的矩阵-张量分解的光谱解混. 其中 CPD 分解需要张量秩的先验信息, 求解该信息是一个非确定性多项式问题 (Non-deterministic Polynomial, NP-hard) 问题, 而 Tucker 分解无法直接与线性解混模型建立联系, 通过增加 BTD 分解的方式有效克服了上述问题, 并建立了矩阵-张量的线性解混模型.

由于同时利用了空间和光谱信息,光谱-空间联合约束表示的结构先验能够提高解混精度.然而,如何有效地建立光谱-空间联合关系,并全面准确地表达光谱的结构信息仍然是一个具有挑战性的问题.其综述结论如图 9 所示.

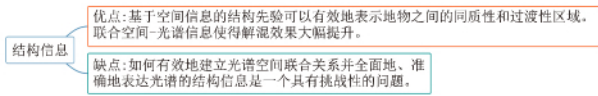


图 9 非负矩阵分解中的结构先验综述结论  
Fig. 9 summary of the structure information based on NMF

### 2.2 深层非负矩阵分解

一般情况下,基于 NMF 的光谱解混算法容易导致 NP-hard 问题<sup>[73]</sup>.浅层非负矩阵分解均在不同程度上对各约束条件进行了松弛处理.深层非负矩阵分解的光谱解混模型是受深度学习思想的影响,使用多层非负矩阵分解对高光谱进行解混处理,降低陷入局部最小值的风险,提高了高光谱数据的解混性能<sup>[21]</sup>.在深层 NMF 结构中,端元矩阵被认为是若干个稀疏矩阵的乘积,如图 10 所示.在每一层的代价函数中加入了端元矩阵的稀疏约束和丰度的稀疏约束.从物理角度来看,虽然端元矩阵不是稀疏的,但是通过多层结构,可以将其分解成若干个稀疏矩阵.其综述结论如图 11 所示:虽然该方法能够获得比单层较好的解混性能,但物理含义不明确,其他性能目前尚不清楚,需进一步对其进行探索和研究.

$$Y = \theta_1 W_1, W_1 = \theta_2 W_2, W_{L-1} = \theta_L W_L$$

$$\theta = \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_L W = W_L$$

第  $l$  层的分解模型如下:

$$\min_{\theta_l, W_l} \frac{1}{2} \|Y_l - \theta_l W_l\|_F^2 + \alpha \|\theta_l\|_{\frac{1}{2}} + \beta \|W_l\|_{\frac{1}{2}}$$

$$\text{s. t. } W_l \geq 0, \theta_l \geq 0, \quad (6)$$

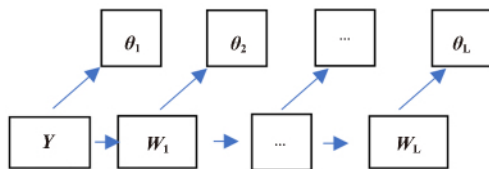


图 10 深度非负矩阵分解  
Fig. 10 deep NMF

### 3 原型分析的光谱解混方法

NMF 的光谱解混虽然能够处理高混合像元的情况,达到一定的解混效果,但其非负性导致该方法容易陷入局部极值解,且易产生虚假的端元矩阵.为

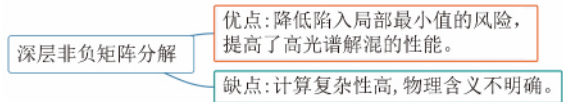


图 11 深度非负矩阵分解综述结论  
Fig. 11 summary of deep NMF

了改善目标函数非凸性和虚假端元情况可采用原型分析的光谱解混算法<sup>[74]</sup>.针对该算法的综述脉络如图 12 所示.统计学中的原型分析是类似于聚类分析的无监督学习方法,由 Adele Cutler 和 Leo Breiman 于 1994 年提出.与“典型”观测(聚类中心)不同,它寻求多维数据中的极值点,也就是所谓的“原型”.原型是若干个观测值的凸组合,同时,观测值也可表示为原型的凸组合<sup>[75]</sup>.高光谱混合像元中的端元具有极值特征,因此,原型分析理论适用于端元提取,同时亦能实现丰度估计.它将每个数据样本表示为一些纯原型的线性组合.每个原型本身也是数据样本的线性组合.观测到的光谱信号与实际地面覆盖类型之间存在着对应的关系<sup>[74]</sup>.原型分析能够通过增加松弛算子和尺度参数使得凸包的顶点移向凸集内部从而减少虚假端元的产生.

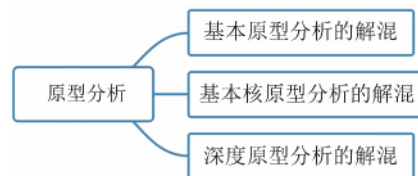


图 12 原型分析的综述脉络图  
Fig. 12 contents of archetype analysis

设  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_K) \in R^{L \times K}$  是  $K$  个像素  $L$  个波段下的光谱图像,原型分析的目的是找到  $N$  个原型样本  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in R^{L \times N}$ ,其目标函数可以表示如下:

$$\min_{C, W} \|Y - \theta W\|_F^2 = \|Y - YC W\|_F^2$$

$$\text{s. t. } C \geq 0, W \geq 0, \quad (7)$$

其中  $C \in R^{K \times N}, W \in R^{N \times K}$ .  $\theta$  是端元矩阵,  $W$  是丰度矩阵.

传统的端元提取方法的基本假设是端元位于单纯形的顶点.原型分析属于在整个观测数据点中搜索主凸包的凸优化方法.即使高光谱图像中没有纯端元,原型分析可以通过引入松弛因子  $\delta$  和缩放参数  $\alpha$  处理该问题,如图 13 所示.

$$\min_{C, S} \|Y - YC \text{diag}(\alpha) W\|_F^2$$

$$\text{s. t. } C \geq 0, W \geq 0, 1 - \delta \leq \alpha_d \leq 1 + \delta \quad (8)$$

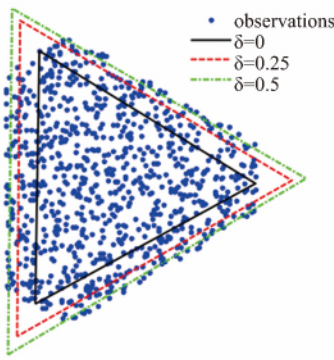


图 13 原型分析  
Fig. 13 archetype analysis

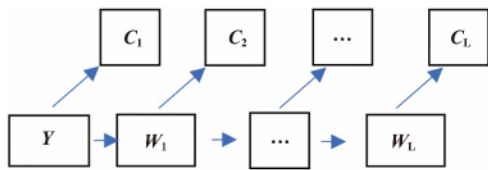


图 14 深度原型分析  
Fig. 14 deep archetype analysis

为了拓宽原型分析在非线性光谱解混中的应用,在核函数的基础上改进了基于原型分析的光谱解混方法,该方法能够从映射的希尔伯特空间发现原型,灵活地生成适应非线性数据的原型<sup>[76]</sup>.同时,受深度学习方法的启发,一种具有差分激活的多层原型分析的解混方法,亦能改善解混效果<sup>[77]</sup>.如图 14 所示:网络的每一层通过对当前丰度进行原型分解,产生了用于提升解混效果的新原型.

基于原型分析的综述结论如图 15 所示:虽然原型分析解决了 NMF 的非凸问题,但是该方法在高混合度像元存在的情况下,如何调整松弛因子和尺度参数使其能够准确地提取端元依然是一个难题.

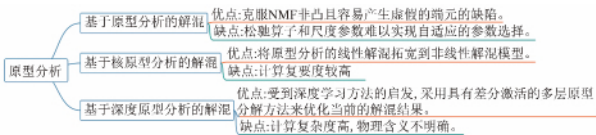


图 15 原型分析的综述结论  
Fig. 15 summary of archetype analysis

#### 4 贝叶斯方法的光谱解混

本章的综述脉络如图 16 所示.原型分析的光谱解混的前提是端元谱是恒定不变的.然而,实际工程领域经常会遇到由环境变化引起的端元谱变异的情

况.在 2.1.1 小节中,介绍了 NMF 框架下关于谱变异情况的光谱解混方法,将谱变异情况视作某种矩阵操作,但其泛化能力不强.而贝叶斯方法提供了一个强大的框架,通过良好的统计手段将有意义的先验信息纳入到建模过程中<sup>[78]</sup>能够为光谱数据、丰度和端元中存在的变异性和不确定性建模.从特征学习的角度看,特征是其端元,特征系数是其丰度<sup>[79]</sup>.贝叶斯特征学习模型最初是由 Schmidt M N 提出<sup>[80]</sup>,并由 Arngren M<sup>[81]</sup>改进后应用于光谱解混.其从贝叶斯的角度对 NMF 光谱解混方法做出了新的解释:  $\frac{1}{2} \|Y - \theta W\|^2$  对应于高斯先验分布,正则化项  $J(\theta)$  和  $g(W)$  分别对应于参数  $\theta$  和  $W$  的概率先验.丰度和端元被看作是最大后验概率(Maximum a Posteriori Estimation, MAP)估计量.

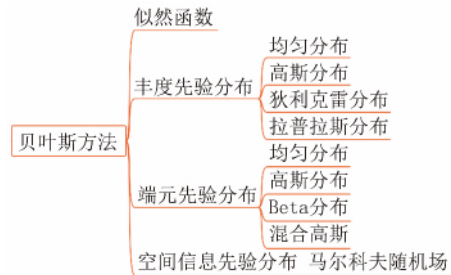


图 16 贝叶斯综述脉络图  
Fig. 16 contents of Bayesian methods

$$p(\theta, W | Y, \varphi) = \frac{p(Y | \theta, W, \sigma^2) p(\theta | \varphi) p(W | \varphi) p(\sigma^2 | \varphi)}{p(Y)}, \quad (9)$$

其中  $\sigma^2$ ,  $\theta$  和  $W$  服从某种概率分布,这些分布函数的参数组成了超参数  $\varphi$ .  $p(Y | \theta, W, \sigma^2)$  称为似然函数;  $p(\theta | \varphi)$  为端元先验分布;  $p(W | \varphi)$  是丰度先验分布;  $p(\sigma^2 | \varphi)$  是噪声先验分布.此外,为了利用空间信息,改善解混效果,可通过将光谱图像分割成同质区域并对其创建不同的类别标签,通过使用类别标签和马尔科夫随机场完成对光谱邻域的建模<sup>[78, 82, 83, 84]</sup>.该方法需要进一步考虑马尔科夫随机场的先验表达形式.因此,基于贝叶斯方法的光谱解混通常需要关注似然函数、丰度先验分布、端元先验分布、噪声先验分布以及马尔科夫随机场的先验分布.目前贝叶斯方法中普遍认为噪声方差服从参数  $v, \delta$  的伽玛逆分布(Inverse-Gamma).  $v$  服从杰弗里斯先验分布(Jeffreys' s Priori),  $\sigma$  通常设为 300<sup>[85]</sup>.接下来将从似然函数、丰度先验、端元先验以及表达空间信息的马尔科夫随机场进行综述.



#### 4.1 似然函数

设观测光谱的混合模型写成向量形式如下:  $y = \theta w + e$ , 其中  $e$  是噪声.

目前似然函数的表达形式主要有两种:

第一种似然函数模型可表示为多元高斯模型<sup>[78-79, 83, 86-88, 90-93]</sup>

$$p(y | w, \beta) = N(y | w\theta, \beta^{-1}I) \\ = (2\pi)^{-N/2} \beta^{-N/2} \exp\left[-\frac{\beta}{2} \|y - \theta w\|_2^2\right] \quad (10)$$

大部分文献采用这种似然函数的表达方法.

第二种似然函数模型是由 Wu R<sup>[92]</sup> 提出, 其认为上述方法难以处理异常点的情况, 并指出  $y$  不一定是高斯分布, 偶尔可能存在异常点, 此时  $y$  可以表示为:

$$p(y | w, \beta) = (1 - \alpha) N(y | w\theta, \beta^{-1}I) + \alpha h(y) \quad (11)$$

其中  $\alpha$  表示  $y$  是异常点的概率;  $h(\cdot)$  表示异常点概率密度函数, 此处, 其概率密度函数是均匀分布. 该方法采用随机最大似然算法求解模型参数, 可解决部分异常点问题.

#### 4.2 丰度先验分布

本节从四个方面整理和比较丰度先验的数学模型: 均匀分布; 高斯分布; 狄利克雷分布; 拉普拉斯分布.

##### (1) 均匀分布

根据丰度  $W$  必须满足 ASC 和 ANC 的约束条件, 单纯形上的均匀分布被选为丰度向量  $w$  的先验概率分布<sup>[83, 86-87]</sup>.

$$S = \left\{ w \mid w_r \geq 0, \forall r = 1, \dots, R, \sum_{r=1}^R w_r = 1 \right\} \\ f(w) \propto \mathbf{1}_S(w) \quad (12)$$

其中  $\propto$  意味着左右项成“正比”,  $\mathbf{1}_S(\cdot)$  是定义在  $S$  上的示性函数

$$\mathbf{1}_S(w) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } w \in S \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

丰度矩阵先验表示为

$$f(W) = \prod_{n=1}^N f(w_p) \quad (13)$$

##### (2) 高斯分布

均匀先验含有很少的先验信息, Eches O<sup>[90]</sup> 提出用 Eches 模型表示丰度的先验信息. 该模型需要对丰度向量进行参数化处理, 设丰度向量  $w_p$  的每个成份被表示成一组随机变量  $(t_{1,p}, t_{2,p}, \dots, t_{R,p})$  的函数, 其数学表达式如下:

$$w_{r,p} = \frac{\exp(t_{r,p})}{\sum_{i=1}^R \exp(t_{i,p})} \quad (14)$$

其中  $t_{i,p}$  为逻辑参数. 该函数表示将  $t$  变化到  $w$  的操作. 其逆操作表示为

$$t_p = \text{clr}(w_p) = \left[ \ln \frac{w_{1,p}}{g(w_p)}, \dots, \ln \frac{w_{R,p}}{g(w_p)} \right] \quad (15)$$

其中  $g(w_p) = \sqrt{w_{1,p} \cdots w_{R,p}}$ .  $t_p$  的成份服从独立同分布的高斯分布

$$t_{r,p} | z_p = k, \mu_{r,k}, \delta_{r,k}^2 \sim N(\mu_{r,k}, \delta_{r,k}^2) \quad (16)$$

该方法开辟了用非约束的随机向量描述带约束的丰度向量的新途径.

另外可将光谱数据划分为若干个同质区域, 统计同质区域的方差和均值, 并将该区域的丰度视作服从此方差和均值的高斯先验分布<sup>[94]</sup>.

##### (3) 狄利克雷分布

狄利克雷 (Dirichlet) 分布能克服均匀分布对先验信息描述不足的问题<sup>[95]</sup>. 其原因是: Dirichlet 分布能自动满足 ANC 和 ASC 的约束条件, 可处理高光谱数据中通常存在的统计依赖性问题, 其混合形式 (混合 Dirichlet 分布) 能够对更复杂的分布情况进行建模. 其中, 丰度向量服从参数  $u$  的狄利克雷分布, 其数学表达如下:

$$f(w | u) = \sum_{k=1}^K \epsilon_k D(w | u_k) \\ = \sum_{k=1}^K \epsilon_k \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^p u_{kj})}{\prod_{j=1}^p \Gamma(u_{kj})} \prod_{j=1}^p w_j^{u_{kj}-1} \quad (17)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  是伽马函数. 该先验得到了研究者的广泛认可<sup>[78, 84, 88, 91-93, 96]</sup>.

进一步考虑  $w_{r,p}$  的分布<sup>[90]</sup> 并不具有封闭的形式<sup>[78]</sup>,  $t_{r,p}$  的独立性假设在理论上并不成立. 为了诠释丰度稀疏性特征, 其提出了丰度向量服从常量参数  $(a; \dots, a) \in \mathbb{R}^R$  的对称狄利克雷先验分布的表示方法.

$$w_p \sim \text{Dir}(a; \dots, a)$$

$$f(w_p) \propto \prod_{r=1}^R w_r^{a-1} \quad (18)$$

其中  $a=1$  当等同于均匀先验分布; 当  $a < 1$  意味着稀疏性先验分布.

##### (4) 拉普拉斯分布

由  $\ell_1$  范数表示的稀疏性约束本质上等同于拉普拉斯分布<sup>[97]</sup>, 则提出用拉普拉斯函数表示丰度概率分布的方法.

$$\mathcal{L}(w_i | \lambda) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda |w_i|)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{w} | \lambda) = \prod_{i=1}^R \mathcal{L}(w_i | \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^R \exp(-\lambda \|\mathbf{w}\|_1) \quad (19)$$

但是由于丰度存在非负性约束条件,拉普拉斯先验中不得不直接对  $\mathbf{w}$  做截断处理;截断所导致的问题是观测光谱的似然函数难以保持共轭性;为了克服该问题,工程上一般通过两层的贝叶斯模型实现拉普拉斯分布:第一层是丰度服从高斯分布并在此完成非负性的截断,设  $\gamma_i$  为  $w_i$  的由  $\beta$  归一化的方差,则其截断后的分布表示如下:

$$p(\mathbf{w} | \boldsymbol{\gamma}, \beta) = N_{\mathbb{R}_+^R}(\mathbf{w} | 0, \beta^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \quad (20)$$

其中  $\mathbb{R}_+^R$  为  $\mathbb{R}^R$  的非负区域,  $N_{\mathbb{R}_+^R}(\cdot)$  表示截断的高斯分布;  $\mathbf{A}$  是对角矩阵  $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R)$ ,  $\beta$  是归一化参数,确保其后验概率的单调性.

第二层是参数  $\beta$  的伽马分布

$$p(\beta | k, \vartheta) = \Gamma(\beta | k, \vartheta) = \frac{\vartheta^k}{\Gamma(k)} \beta^k \exp(-\vartheta \beta) \quad (21)$$

其中  $\beta \geq 0, \vartheta \geq 0$ . 该分布保持了似然函数的共轭性;提升了表达稀疏特征的能力.

另外,为了进一步准确表达丰度的稀疏特征,定义反比例的参数矩阵  $\mathbf{Q}$ ,丰度矩阵服从以  $\mathbf{Q}$  为条件的拉普拉斯分布;对丰度  $\mathbf{W}$  做截断处理后,  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{Q}$  将服从下列分布<sup>[85]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} | \mathbf{Q} &\sim \varepsilon(\mathbf{W} | \mathbf{Q}) \\ \mathbf{Q} &\sim \text{Gamma}(\mathbf{Q} | \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (22)$$

丰度的综述结论如图 17 所示:四种概率分布各有优缺点:均匀分布的优势是计算简单,但是信息表达不足,比如无法表示稀疏等信息;高斯分布能够表达相对比较充足的先验信息,但是需要做预处理,比如参数化处理或者对光谱图像进行区域分割等预处理;狄利克雷分布能够较好地表达 ANC 和 ASC 的约束条件,但是计算过程较复杂;拉普拉斯分布不仅能够表达 ANC 和 ASC 的先验信息,还可以较好地表示稀疏信息;一般在工程上需要两层贝叶斯来实现.

### 4.3 端元先验分布

本节将介绍端元分布的数学描述方法. 观察 LMM 模型,从矩阵的角度看,观测光谱可被看作端元谱库的确定的线性组合;从概率角度看,端元谱可被视作随机变量. 接下来将从四个方面对端元分布函数进行归纳.

#### (1) 均匀分布

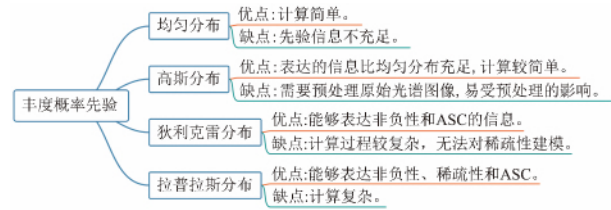


图 17 贝叶斯方法中的丰度概率先验的综述结论  
Fig. 17 summary of abundance distribution based on Bayesian

端元可作为非负实数的无信息分布,即被认为是零和无穷之间的均匀分布<sup>[86]</sup>:

$$p(\vartheta_m) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \mathbf{1}(0 \leq \vartheta_m \leq u) \quad (23)$$

其中  $\mathbf{1}(\cdot)$  是示性函数,该函数的含义如下:  $\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \text{ 是真} \\ 0 & \text{其他情况下} \end{cases}$ .

#### (2) 高斯分布

用高斯分布为端元建模<sup>[90, 93]</sup>:

$$\boldsymbol{\vartheta}_r | m_r, \sigma^2 \sim N(m_r, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (24)$$

其中  $m_r$  已知. 其方差服从共轭反伽马分布:

$$\sigma^2 | \delta \sim \mathbf{Jg}(v, \delta) \quad (25)$$

其中  $v, \delta$  分布是形状参数和尺度参数. 通常  $v = 1$ .  $\delta$  服从杰弗里斯先验分布 (Jeffreys' s Priori):  $f(\delta) \propto \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\delta)$ .

根据端元谱的值处于  $(0, 1)$  区间,截断的高斯分布被用来为端元谱建模<sup>[82, 83]</sup>.

$$\mathbf{y}_n = \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\vartheta}_r w_r = \boldsymbol{\vartheta}_n \mathbf{w}_n \quad (26)$$

其中  $\boldsymbol{\vartheta}_r \sim N(m_r, \text{diag}(\boldsymbol{\delta}_r^2))$ . 假设其均值和方差服从截断的高斯分布

$$\begin{aligned} m_r &\sim N_{(0,1)}(\tilde{m}_r, \boldsymbol{\epsilon}^2 \mathbf{I}) \\ \boldsymbol{\delta}_r^2 &\sim \prod_{r=1}^R \frac{1}{\delta_{rl}^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\delta_{rl}^2) \end{aligned} \quad (27)$$

在端元服从高斯分布的前提下,通过最大期望 (Maximum Expectation, EM) 算法<sup>[2, 98]</sup> 求解均值和方差;也可通过提取端元簇<sup>[99]</sup>, 并对其进行均值和方差估计以得到高斯分布的参数<sup>[94]</sup>;另外,在均匀区域,像元间光谱变化主要由端元光谱变化引起,端元谱的方差可通过估计该区域光谱的方差获得<sup>[100]</sup>.

#### (3) 贝塔分布

在手动检查材料反射率值时发现其分布具有偏移现象<sup>[101]</sup>,如图 18 所示:深蓝色是材料反射率的直方图,粉色曲线是高斯拟合曲线,红色是贝塔分布 (Beta Distribution) 的拟合曲线. 可见高斯分布不能

表达端元分布中的偏移. 端元的贝塔分布恰恰能够表达分布的偏斜性和光谱的变异性. 该分布将每个波段的每个端元视作单变量的贝塔分布:

$$\vartheta_{rn} \sim B(\cdot | \alpha_{rn} \beta_{rn}) \quad , \quad (28)$$

其中  $\vartheta_{rn}$  表示第  $r$  个端元第  $n$  个波段的光谱值.  $B(\cdot)$  是贝塔分布.

$$B(\theta | \alpha \beta) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \beta)^{-1} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} \quad . \quad (29)$$

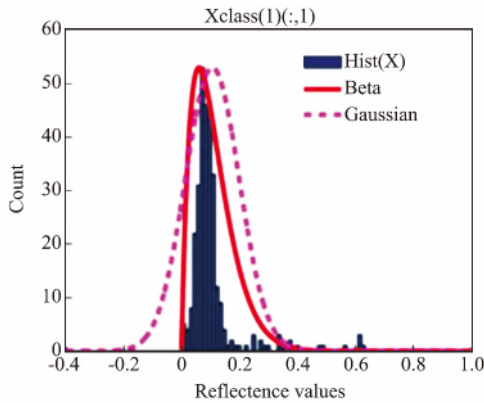


图 18 贝塔分布和高斯分布<sup>[101]</sup>  
Fig. 18 Beta distribution and Gaussian distribution

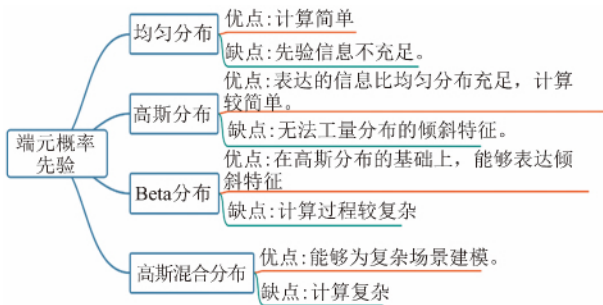


图 19 贝叶斯方法中的端元概率先验的综述结论  
Fig. 19 summary of endmembers distribution based on Bayesian

#### (4) 混合高斯分布

通常假设每个像元中的端元服从单一的高斯分布或者贝塔分布, 该假设不完全适用于实际光谱图像. 通过构建端元的混合高斯模型逼近更为复杂的场景, 取得了不错的效果, 但也增加了计算时间<sup>[102]</sup>.

总之, 四种先验分布各有优劣势, 图 19 对其进行了总结和比较: 均匀分布的计算简单, 但信息不足; 高斯分布虽然能够表达一定的先验信息, 但无法度量端元谱分布的倾斜特征; 贝塔分布在高斯分布的基础上可以表达其倾斜特征, 计算稍微复杂; 上述

单一分布无法表达复杂场景信息; 混合高斯能够对复杂场景建模, 但计算复杂.

#### 4.4 空间信息先验分布

在自然界中, 大多数地物(例如水, 木材或草)倾向于以簇或团块的形式存在. 因此, 高光谱图像中的相邻像素很可能具有一些相似的性质, 如谱, 丰度向量和标签. 在贝叶斯框架下利用这种空间相关性信息能够提高解混效果<sup>[78, 82, 83, 84]</sup>. 通常先将图像分割成若干个小块, 为块分配一个标签  $z_i$ ; 其次, 通过马尔科夫随机场( Markov Random Field, MRF) 将  $z$  和其他相似信息纳入解混过程. 例如  $P(z) > 0$  同时  $P(z | z_{-p}) = P(z | z_{S_p})$ , 其中  $S_p$  是点  $p$  的邻域,  $z_{-p}$  是去掉点  $p$  后的标签. 若  $z$  满足马尔科夫随机场的条件, 依据 Hammersley-Clifford 理论<sup>[82]</sup>, 可以为马尔科夫随机场和吉布斯分布之间建立等价关系.  $P(z) \propto \exp(-T^{-1}U(z))$ , 其中  $T$  为温度,  $U(z)$  为能量函数. 类别标签服从的先验模型一般采用 Potts 模型. 它可以通过全条件分布来定义.

$$P(z | z_{-p}) \propto \exp[\beta \sum_{p' \in S_p} \delta(z_p - z_{p'})] \quad . \quad (30)$$

空间信息先验分布的综述结论如图 20 所示: 马尔科夫随机场的应用引入了局部上下文信息, 使得计算复杂度和解混效果大幅提升, 同时, 需要对光谱图像的进行可靠的预处理操作.

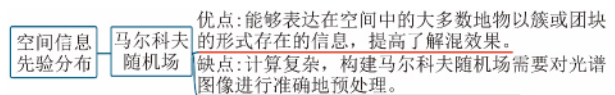
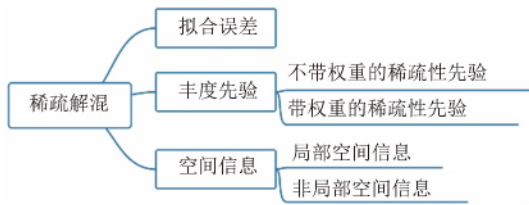


图 20 贝叶斯方法中的空间信息先验分布的综述结论  
Fig. 20 summary of space information distribution based on Bayesian

## 5 稀疏解混

地面的多样性和复杂性增加了端元提取的难度. 为了避免不准确地端元提取给丰度估计带来不可靠的估计效果, 随着美国地质调查局( United States Geological Survey, USGS) 光谱库<sup>[103]</sup> 的出现, 稀疏解混方法越来越受到业界的关注. 其目标是在已知端元谱库的基础上估计光谱图像中出现的端元的丰度. 其前提假设是混合像元可以表示为多个纯端元光谱的线性组合. 一般情况下, 已知的端元谱库含有大量纯端元光谱信息, 从中选择若干个端元的光谱逼近混合像元的光谱, 必将导致丰度具有稀疏性, 因此, 该方法被称为稀疏解混或丰度估计<sup>[42]</sup>. 稀疏解混的基础模型如下<sup>[1]</sup>



$$\min_w \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|W\|_{1,1} \quad (31)$$

s. t.  $W \geq 0, \mathbf{1}^T W = \mathbf{1}$

称该模型以及求解该模型的方法为变量分离和增广拉格朗日的稀疏分解算法 (Sparse Unmixing via Variable Splitting and Augmented Lagrangian, SUN-SAL). 针对基础数学模型, 本节主要从拟合误差、丰度先验、空间信息等三个方向进行整理和比较, 如图 21 所示.

### 5.1 拟合误差

(1) 当前大多数的拟合误差是通过拟合误差矩阵的  $F$  范数进行表示<sup>[42, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111]</sup>, 如公式 (31) 所示. 优点是求解方便, 计算效率较高. 缺点是对噪声敏感.

(2)  $\ell_2$  范数对噪声和异常点比较敏感<sup>[112]</sup>, 则用  $\ell_{2,1}$  范数代替稀疏解混数学模型中的  $\ell_2$  范数, 以减小解混效果对噪声和异常点的敏感度, 其拟合误差表示如下:

$$\min_w \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_{2,1}^2 + \lambda \|W\|_{2,1} \quad (32)$$

s. t.  $W \geq 0$

(3) 观测光谱的噪声有两部分: 稀疏噪声和高斯白噪声. 稀疏噪声一般是影响图像中几个像素的噪声. 它包括线条, 散粒噪声以及脉冲噪声, 该模型如下式所示<sup>[113]</sup>:

$$\min_w \frac{1}{2} \|Y - \theta W - S\|_F^2 + \lambda \|W\|_{2,1} + \gamma \|S\|_1 \quad (33)$$

s. t.  $W \geq 0$

其中  $S$  意味着稀疏噪声.

(4) 当前大部分的研究工作采用矩阵的  $F$  范数度量拟合误差;  $F$  范数对噪声比较敏感<sup>[114, 115]</sup>, 而 IS 散度 (Itakura-Saito Divergence, ISD) 具有尺度不变和对乘性噪声不敏感等优点. 为确保能够较好地表示两个光谱之间的拟合度, 使得重建信号更加鲁棒, 提出用 IS 散度量拟合的程度, 并改进了解混效果.

(5) 在高光谱图像中, 不同波段的噪声分布是不同的, 不同波段含有相同噪声的假设会严重影响解混的结果<sup>[116]</sup>. 另外, 由  $\ell_2$  范数表示的拟合误差项对异常点比较敏感, 因此, 提出用最大相关熵度量拟合的程度. 该度量具有较强的抗噪能力<sup>[117]</sup>.

$$\min_w - \sum_{i=1}^L \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2} \|Y_i - (\theta W)_i\|^2\right) \quad (34)$$

s. t.  $W \geq 0$

拟合误差的综述结论如图 22 所示: 基于矩阵范数的似然函数的计算过程简单, 但均对噪声敏感; 基于 IS 散度和最大相关熵度量的似然函数具有较高的鲁棒性, 但计算过程较为复杂.

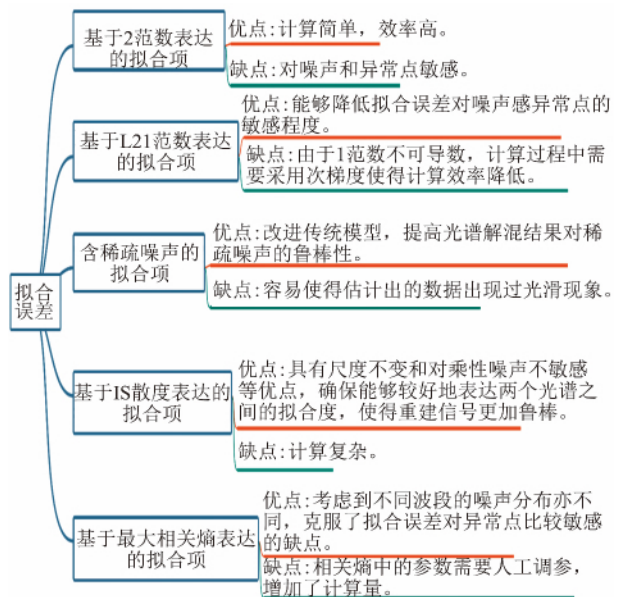


图 22 稀疏解混中的拟合误差项的综述结论  
Fig. 22 summary of fitting error item based on sparse unmixing

### 5.2 丰度先验

2.1.2 小节阐述了为丰度矩阵施加稀疏先验的物理含义 (2.1.2 节介绍的是 NMF 光谱解混中的丰度先验, 本节介绍的稀疏解混中的丰度先验, 其根本区别在于: 前者中的端元是未知, 而后者中的端元是已知). 因此, 针对稀疏性先验, 本节主要从不带权重和带权重两个方面进行归纳整理. 该节是对 2.1.2 小节的内容的补充. 其综述内容均来自稀疏解混的相关文献.

#### (1) 不带权重信息的稀疏性先验.

通常情况下, 稀疏性通过  $\ell_1$  范数进行描述<sup>[42]</sup>. 用  $\ell_q (0 \leq q \leq 1)$  范数代替  $\ell_1$  范数表示稀疏性, 取得了较精确的丰度估计结果<sup>[104-106, 116, 118]</sup>. 考虑到同质区域的混合像元的光谱具有很高的相似性, 其相应

的丰度矢量具有很高的相关性. 并认为处于局部邻域的混合像元一般是由相同的地物构成, 该先验可以通过为丰度矩阵施加  $\ell_{2,1}$  范数约束进行表示, 该方法被称为基于受约束的变量分离和增广拉格朗日稀疏解混 (Constrained Sparse Unmixing via Variable Splitting and Augmented Lagrangian, CLSUnSAL)<sup>[107]</sup>. 并通过将  $\ell_{2,1}$  变为  $\ell_{2,p}$  进一步改进 CLSUnSAL 算法<sup>[108]</sup>. 又由于  $\ell_{1-2}$  比  $\ell_1$  具有较强的描述稀疏特征的能力, 解混模型被修改为<sup>[109]</sup>

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|W\|_{\ell_{1-2}} \\ \text{s. t.} \quad & W \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

其中,  $\|W\|_{\ell_{1-2}} = \sum_{i=1}^n (\|W_i\|_1 - \|W_i\|_2)$ .

### (2) 带权重信息的稀疏性先验.

与超完备光谱字典相比, 高光谱图像通常包含更少的端元, 可以通过引入一个权重来提高丰度的列稀疏度<sup>[110]</sup>, 另一个权重用来提高每个端元的丰度向量的稀疏性<sup>[111]</sup>.

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|Q_1 \odot Q_2 W\|_{1,1} \\ \text{s. t.} \quad & W \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

此外, 丰度矩阵的行求和意味着将该像元的端元谱进行了分类并产生每类的丰度, 并以此改进模型<sup>[119]</sup>. 采用  $\ell_{2,1}$  表示丰度的稀疏特征, 并施加权重以改进 CLSUnSAL 算法, 提高了丰度估计精度. 该权重被视作待优化的参数<sup>[120]</sup>.

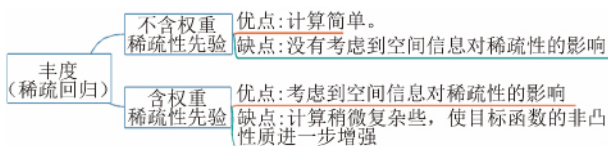


图 23 稀疏解混中的丰度的综述结论

Fig. 23 summary of abundance information based on sparse unmixing

丰度先验信息的综述结论如图 23 所示: 丰度先验信息与基于非负矩阵分解的丰度先验信息相似; 从  $\ell_1$  范数  $\ell_{0.5}$  范数  $\ell_p$  范数和混合范数对稀疏特征的表达能力的依顺序愈来愈强; 由于加权的  $\ell_1$  范数引入了空间邻域信息, 其表达的稀疏信息更为准确. 然而, 范数本身作为距离的一种测度, 易忽略数据内部的空间结构, 以  $\ell_1$  范数为例, 度量向量  $[a \ b]$  和向量  $[c \ d]$  的相似度包括:  $a$  与  $c$  之差  $b$  与  $d$  之差. 但难以准确度量  $|a - b|$  与  $|c - d|$  之间的相似度.  $a - b$  和  $c - d$  是向量  $[a \ b]$  和向量  $[c \ d]$  存在的一种内部结

构.  $\ell_1$  范数无法度量结构之间是否具有相似性. 因此, 如何在范数度量的基础上, 加入数据内部的结构信息是一个值得研究的方向.

## 5.3 空间信息

### (1) 局部信息

传统的光谱解混方法仅使用了光谱信息而忽略了空间上下文信息, 例如, 两个相邻混合像元极有可能含有相同比例的某个端元. 含有全变差信息的变量分离和增广拉格朗日稀疏解混 (Sparse Unmixing via variable Splitting Augmented Lagrangian and Total Variation, SUnSAL-TV) 将全变差信息 (Total Variation, TV) 作为先验信息改善了逆问题的潜在条件<sup>[121]</sup>.

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|W\|_{1,1} + \lambda_{TV} TV(W) \\ \text{s. t.} \quad & W \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

其中,  $TV(W) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \|w_i - w_j\|_1$ ,  $\mathcal{E}$  表示水平和垂直邻域的像元丰度. 该算法通过 TV 约束强化了相邻像素之间的空间均匀性. 进一步, 通过计算邻域点的空间距离和谱角距离的方法为 TV 信息加入空间权重  $Q$ <sup>[122]</sup>. 改善了解混效果. 空间距离越近、谱角距离越近权重越高, 否则权重低.

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|W\|_{1,1} + \lambda_{TV} \|Q \cdot TV(W)\|_1 \\ \text{s. t.} \quad & W \geq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

参照局部光谱解混方法的思想, 同时为丰度矩阵增加低秩和稀疏性约束能够提升丰度估计效果<sup>[111]</sup>. 且由于局部丰度具有较高的相关性, 采用最小化局部邻域矩阵的核范数可以为该相关性进行建模<sup>[123]</sup>. 考虑到在给定的高光谱数据中, 具有相似光谱的像素应该具有相似的丰度, 即两个像素之间的相似性与其丰度的相似性相一致. 可采用光谱数据的相似性度量作为权重来引导丰度估计, 并取得一定的效果<sup>[124]</sup>. 此外, 估计的光谱数据的内部结构与真值光谱数据的内部结构应该一致, 可采用梯度对该先验进行建模<sup>[118]</sup>. 为了克服图像扫描固有的过采样效应导致混合像元通常包含邻域像元的光谱特征, 可采用联合局部邻域的光谱解混算法可以提高光谱解混效果<sup>[125]</sup>. 为了提高解混抗噪能力, 有研究者利用光谱图像学习到一个字典; 在该字典基础上对光谱图像进行稀疏重建完成改善了解混效果<sup>[105]</sup>. 有专家认为: 实际场景中, SUnSAL 和 SUnSAL-TV 无法使用谱库对丰度进行准确地估计, 主要存在两个原因: (1) 由于成像条件的差异, 真实场景

和谱库之间存在一定的偏差; (2) 由于其高度的一致性,在光谱库中找到真正的端元依然是个难题.一般利用光谱库来逼近真实场景中的真实端元<sup>[126]</sup>.由此,提出用最少的端元谱库子集逼近真实端元的方法.

(2) 非局部信息

SUNSAL-TV 可能导致过度平滑和界限模糊,考虑到整个丰度图像的非局部空间信息,针对当前像元存在对应邻域结构的情况,在光谱图像中找到所有与该邻域结构相似的其他结构,计算所有相似结构的平均值,用其表示当前像元.这种方法利用图像中的冗余和自相似性有效地保留图像特征之间的空间相关性<sup>[127]</sup>.考虑到邻域结构越相似权重越大,否则权重越小,并将该权重信息纳入光谱解混的数学模型中,进一步改善了非局部均值法的效果<sup>[128]</sup>.在上述工作的基础上,非局部均值法的正则项参数的自适应更新算法提高了解混效率<sup>[129]</sup>.上述表达空间关系的方法没有考虑丰度估计误差.为了解决该问题,可采用下列方法:首先通过非局部均值法计算  $\hat{W}$ ,然后定义估计数据  $W$  与  $\hat{W}$  之差为丰度估计误差,最后将其纳入光谱解混模型.改进的数学模型如下<sup>[130]</sup>:

$$\min_w \frac{1}{2} \|Y - \theta W\|_F^2 + \lambda \|W\|_{2,1} + \gamma \|W - \hat{W}\|_1$$

s. t.  $W \geq 0$  , (39)

其中  $\hat{W}$  是通过非局部均值法计算得到.

空间信息的综述结论如图 24 所示:局部信息与非局部信息均利用了空间信息作为先验,更能准确的估计丰度矩阵;由于空间信息复杂多变且受到环境、气候等条件的影响,采用何种方法对其进行鲁棒性的建模具有一定的难度.

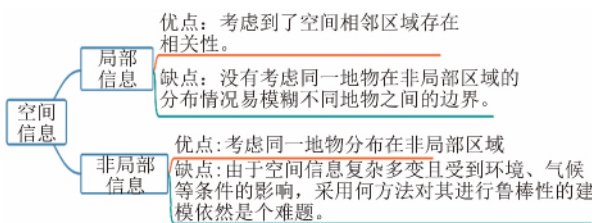


图 24 稀疏解混中的空间信息的综述结论  
Fig. 24 summary of space information based on sparse unmixing

总之,随着 USGS 等端元光谱库越来越丰富,稀疏解混的技术越来越受到重视.由于端元谱库的采集环境与实际光谱图像的采集环境存在差异,因此,

无论从哪个角度改进稀疏解混模型都面临端元谱库的迁移性差的问题.

6 结论

对线性光谱混合模型进行了综述,从 NMF、原型分析、贝叶斯和稀疏解混四个方面阐述了近五年来线性光谱解混模型的相关内容,如图 25 所示.基于 NMF 的解混方法具有较明确的物理意义,较好的数学操作性,克服了几何方法的缺陷,能够处理高混合像元的情况,能够为某些特定的谱变异情况建模.但其存在的问题是目标函数非凸且易产生虚假端元,谱变异模型泛化能力较弱.为了克服 NMF 的非凸问题,近两年出现了采用原型策略的光谱解混算法,称之为基于原型分析的光谱解混算法.然而,在高混合像元存在的场景中,如何调整松弛因子和尺度参数使得其能够找到需要的端元依然存在难度,且原型分析方法中没有考虑谱变异情况.而基于贝叶斯理论的解混方法能有效地将光谱、端元和丰度的变异和不确定性融入解混模型<sup>[2]</sup>,并通过增加合理先验信息改善解混效果,其代价是需要大量的计算.进一步分析,由于地面的复杂性,通过概率分布对复杂场景下的端元和丰度进行建模亦存在难度.上述三种方法中容易出现的问题是可靠的端元提取大大地降低丰度估计的精度.为了避免不可靠的端元提取带来的负面影响,稀疏解混越来越受到业界的关注.其存在的问题是所建立的端元谱库的可迁移性较差,导致采用端元谱库逼近真实光谱图像时无法避免真实环境的误差影响<sup>[11]</sup>.

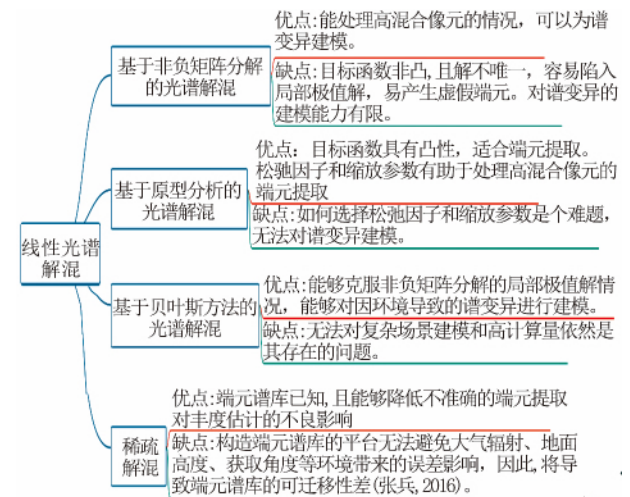


图 25 总结线性光谱解混的四种模型  
Fig. 25 comparison of four linear spectral unmixing methods

综述国内外研究成果、存在的公开问题以及最新的相关理论, 尽管目前线性光谱解混的研究比较多, 但笔者认为有以下几点内容可供参考:

(1) 基于矩阵分解的光谱解混容易落入局部极值解, 采用增加先验信息的方法是解决上述问题的途径之一。然而, 当增加多个先验信息到线性光谱解混的数学模型中时, 其相应的正则项和正则系数的数量增加, 势必增加人工调参的工作量, 创建正则系数的自适应算法是一个非常具有实用价值的研究领域。

(2) 利用原型分析实现光谱解混是一套崭新的研究方法, 其松弛因子和尺度参数可以避免矩阵分解中出现虚假端元, 如何提高该参数的自适应能力值得进一步研究。

(3) 基于贝叶斯方法的光谱解混是以假设其拟合误差、端元、丰度和其他先验信息服从某种概率分布, 并通过构造最大后验概率实现解混。梯度依然是光谱中的重要信息, 其局部亦存在梯度的光滑性信息, 如何构造光滑性梯度的先验概率值得探索和研究。

(4) 基于稀疏解混的解混算法中的光谱库存在迁移性差的问题, 采用迁移学习相关理论解决该问题是值得探索的一个研究方向。

(5) 谱变异情况在实际光谱图像中广泛存在, 且对光谱解混的影响较大。如何为谱变异进行快速准确地建模值得探讨。

(6) 上述四种解混模型中均引入大量的先验信息, 以改进丰度估计的效果。其度量拟合误差采用的是估计数据与被估计数据之差的 F 范数, 该度量方法仅仅能够度量数据之间的能量差异, 并不能度量数据内部结构之间的差异, 如何构造度量数据内部结构差异的数学模型亦值得研究和探索。

## References

- [1] ZHANG Liang-Pei, LI Jia-Yi. Development and prospect of sparse representation-based hyperspectral image processing and analysis [J]. *Journal of Remote Sensing* (张良培, 李家艺. 高光谱图像稀疏信息处理综述与展望. 遥感学报), 2016, 20(5): 1091-1101.
- [2] Bioucas Dias J M, Plaza A, Dobigeon N, et al. Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2012, 5(2): 354-379.
- [3] Zhang B, Zhuang L, Gao L, et al. PSO-EM: A Hyperspectral Unmixing Algorithm Based On Normal Compositional Model [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2014, 52(12): 7782-7792.
- [4] Lu G, Qin X, Wang D, et al. Estimation of tissue optical parameters with hyperspectral imaging and spectral unmixing (M). 2015.
- [5] Matsuki T, Yokoya N, Iwasaki A. Hyperspectral Tree Species Classification of Japanese Complex Mixed Forest With the Aid of Lidar Data [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2015, 8(5): 2177-2187.
- [6] Brook A. Quantitative detection of settled dust over green canopy [C]// The Workshop on Hyperspectral Image & Signal Processing: Evolution in Remote Sensing. EGU General Assembly Conference Abstracts, 2017: 1-4.
- [7] Alam M S, Sidike P. Trends in oil spill detection via hyperspectral imaging [C]// International Conference on Electrical & Computer Engineering. IEEE, 2013: 858-862.
- [8] Lin H, Zhang X. Retrieving the hydrous minerals on Mars by sparse unmixing and the Hapke model using MRO/CRISM data [J]. *Icarus*, 2017, 288: 160-171.
- [9] Baskurt D O, Omruuzun F, Cetin Y Y. Hyperspectral unmixing based analysis of forested areas [C]// Signal Processing and Communications Applications Conference. IEEE, 2015: 2329-2332.
- [10] Das B S, Sarathjith M C, Santra P, et al. Hyperspectral remote sensing: opportunities, status and challenges for rapid soil assessment in India [J]. *Current Science*, 2015, 108(5): 860-868.
- [11] JI Cui-eui, JIA Yong-Hong, LI Xiao-Song. Research on linear and nonlinear spectral mixture models for estimating vegetation fractional cover of nitraria bushes [J]. *Journal of Remote Sensing* (姬翠翠, 贾永红, 李晓松, 等. 线性/非线性光谱混合模型估算白刺灌丛植被覆盖度. 遥感学报), 2016, 20(6): 1402-1412.
- [12] ZHANG Bing. Advancement of hyperspectral image processing and information extraction [J]. *Journal of Remote Sensing* (张兵. 高光谱图像处理与信息提取前沿. 遥感学报), 2016, 20(5): 1062-1090.
- [13] Adams J B, Gillespie A R. *Remote sensing of landscapes with spectral images: a physical modeling approach* [M]. Cambridge University Press, 2006.
- [14] Heylen R, Parente M, Gader P. A review of nonlinear hyperspectral unmixing methods [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2014, 7(6): 1844-1868.
- [15] Shi C, Wang L. Incorporating spatial information in spectral unmixing: A review [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2014, 149: 70-87.
- [16] Wang L, Shi C, Diao C, et al. A survey of methods incorporating spatial information in image classification and spectral unmixing [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2016, 37(16): 3870-3910.
- [17] ZHANG Ying-Tong, XIAO Qing, WEN Jian-Guan, et al. Review on spectral libraries: Progress and application. *Journal of Remote Sensing* (张莹彤, 肖青, 闻建光, 等. 地物波谱数据库建设进展及应用现状. 遥感学报), 2017, 21(1): 12-26.
- [18] YANG Bin, WANG Bin. Review of nonlinear unmixing for hyperspectral remote sensing imagery [J]. *J. Infrared Millim. Waves.* (杨斌, 王斌. 高光谱遥感图像非线性解混研究综述. 红外与毫米波学报), 2017, 36(2): 173-185.
- [19] Winter M E. N-FINDR: an algorithm for fast autonomous

- spectral end-member determination in hyperspectral data [C]//SPIE's International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, International Society for Optics and Photonics, 1999: 266-275.
- [20] Nascimento J M P, Dias J M B. Vertex component analysis: a fast algorithm to unmix hyperspectral data [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2005, **43** (4): 898-910.
- [21] Rajabi R, Ghassemian H. Spectral Unmixing of Hyperspectral Imagery Using Multilayer NMF [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2014, **12** (1): 38-42.
- [22] Mei S, Bi Q, Ji J, et al. Spectral Variation Alleviation by Low-Rank Matrix Approximation for Hyperspectral Image Analysis [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2016, **13** (6): 796-800.
- [23] Ghaffari O, Zoj M J V, Mokhtarzade M, et al. Reducing the Effect of the Endmembers' Spectral Variability by Selecting the Optimal Spectral Bands [J]. *Remote Sensing*, 2017, **9** (9): 884.
- [24] Somers B, Delalieux S, Verstraeten W W, et al. An automated waveband selection technique for optimized hyperspectral mixture analysis [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2010, **31** (20): 5549-5568.
- [25] Donoho D L, Stodden V C. When Does Non-Negative Matrix Factorization Give a Correct Decomposition into Parts [C]//Neural information processing systems (NIPS), 2004: 1141-1148.
- [26] Pauca V P, Piper J, Plemmons R J. Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis [J]. *Linear Algebra & Its Applications*, 2006, **416** (1): 29-47.
- [27] Lee Y L, Andrews M. Blind spectral unmixing for compressive hyperspectral imaging of highly mixed data [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE 2015: 1312-1316.
- [28] Pang Q, Yu J, Sun W. A spectral unmixing method based on wavelet weighted similarity [C]//IEEE International Conference on Image Processing. IEEE, 2015: 1865-1869.
- [29] Li H, Li S, Zhang L. Adaptive endmember extraction based sparse nonnegative matrix factorization with spatial local information [C]//IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE 2015: 1753-1756.
- [30] Fu X, Ma W K, Huang K, et al. Robust volume minimization-based matrix factorization via alternating optimization [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2016: 2534-2538.
- [31] Liu J, Wu Z, Wei Z, et al. A novel sparsity constrained nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing [C]//IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE 2012: 1389-1392.
- [32] Wang N, Du B, Zhang L. An Endmember Dissimilarity Constrained Non-Negative Matrix Factorization Method for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2013, **6** (2): 554-569.
- [33] Chang C I. Spectral information divergence for hyperspectral image analysis [C]//Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1999. IGARSS 99 Proceedings. IEEE 1999 International. IEEE, 1999: 509-511 vol. 1.
- [34] Qian B, Zhou J, Lei T, et al. Nonnegative matrix factorization with endmember sparse graph learning for hyperspectral unmixing [C]//IEEE International Conference on Image Processing. IEEE, 2016: 1843-1847.
- [35] Imbiriba T, Borsoi R A, Bermudez J C M. Generalized linear mixing model accounting for endmember variability [EB/OL]. <https://arxiv.org/pdf/1710.07723v1.pdf>, 2017-10-20.
- [36] Thouvenin P A, Dobigeon N, Tourneret J Y. Hyperspectral Unmixing With Spectral Variability Using a Perturbed Linear Mixing Model [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **64** (2): 525-538.
- [37] Miao L, Qi H. Endmember Extraction From Highly Mixed Data Using Minimum Volume Constrained Nonnegative Matrix Factorization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2007, **45** (3): 765-777.
- [38] Drumetz L, Veganzones M A, Henrot S, et al. Blind hyperspectral unmixing using an Extended Linear Mixing Model to address spectral variability [J]. *IEEE Transactions Image Process*, 2016, **25** (8): 3890-3905.
- [39] Gao Z G, Zhang L Q. Multi-seasonal spectral characteristics analysis of coastal salt marsh vegetation in Shanghai, China [J]. *Estuarine Coastal & Shelf Science*, 2006, **69** (1): 217-224.
- [40] Lukes P, Stenberg P, Rautiainen M, et al. Optical properties of leaves and needles for boreal tree species in Europe [J]. *Remote Sensing Letters*, 2013, **4** (7): 667-676.
- [41] Jia S, Qian Y. Constrained Nonnegative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2009, **47** (1): 161-173.
- [42] Iordache M D, Bioucas-Dias J M, Plaza A. Sparse Unmixing of Hyperspectral Data [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2011, **49** (6): 2014-2039.
- [43] W. He, H. Zhang, L. Zhang, H. Shen. Total Variation Regularized Reweighted Sparse Non-Negative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2017, **55** (7): 3909-3921.
- [44] Bruckstein A M, Elad M, Zibulevsky M. On the Uniqueness of Nonnegative Sparse Solutions to Underdetermined Systems of Equations [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, **54** (11): 4813-4820.
- [45] Qian Y, Jia S, Zhou J, et al. Hyperspectral Unmixing via L0, 5 Sparsity-Constrained Nonnegative Matrix Factorization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2011, **49** (11): 4282-4297.
- [46] Li X, Zhou J, Tong L, et al. Structured Discriminative Nonnegative Matrix Factorization for hyperspectral unmixing [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE 2016: 1848-1852.
- [47] Jiang X, Ma L, Yang Y. Cluster constraint based sparse NMF for hyperspectral imagery unmixing [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE, 2014: 5107-5111.
- [48] Yuan Y, Fu M, Lu X. Substance Dependence Constrained Sparse NMF for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2015, **53** (6): 2975-2986.
- [49] Xu Z, Chang X, Xu F, et al. L1/2 regularization: a thresholding representation theory and a fast solver [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2012, **23** (7): 1013.
- [50] Wang W, Qian Y, Adaptive L1/2 Sparsity-Constrained



- NMF With Half-Thresholding Algorithm for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2015, **8**(6): 2618-2631.
- [51] Sigurdsson J, Ulfarsson M O, Sveinsson J R. Hyperspectral Unmixing With Lq Regularization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2014, **52**(11): 6793-6806.
- [52] Zhu F, Wang Y, Fan B, et al. Spectral unmixing via data-guided sparsity [J]. *IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society*, 2014, **23**(12): 5412-27.
- [53] Salehani Y E, Gazor S, Kim I M, et al.  $\ell_0$ -Norm Sparse Hyperspectral Unmixing Using Arctan Smoothing [J]. *Remote Sensing*, 2016, **8**(3): 187.
- [54] Li J, Bioucas-Dias J M, Plaza A, et al. Robust Collaborative Nonnegative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2016, **54**(10): 6076-6090.
- [55] Lei T, Zhou J, Li X, et al. Region-Based Structure Preserving Nonnegative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2017, PP(99): 1-14.
- [56] Sigurdsson J, Ulfarsson M O, Sveinsson J R, et al. Sparse distributed hyperspectral unmixing [C]// Geoscience and Remote Sensing Symposium. IEEE, 2016.
- [57] Liu X, Xia W, Wang B, et al. An Approach Based on Constrained Nonnegative Matrix Factorization to Unmix Hyperspectral Data [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2011, **49**(2): 757-772.
- [58] Liu J, Zhang J, Gao Y, et al. Enhancing Spectral Unmixing by Local Neighborhood Weights [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2012, **5**(5): 1545-1552.
- [59] Liu R, Du B, Zhang L. Hyperspectral Unmixing via Double Abundance Characteristics Constraints Based NMF [J]. *Remote Sensing*, 2016, **8**(6): 464.
- [60] Chen C H. Independent component analysis for remote sensing study [J]. *Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering*, 1999, **3871**: 150-158.
- [61] Liu J, Wu Z, Wei Z, et al. A novel sparsity constrained nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing [C]// IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE 2012: 1389-1392.
- [62] Mei S, Bi Q, Ji J, et al. Spectral Variation Alleviation by Low-Rank Matrix Approximation for Hyperspectral Image Analysis [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2016, **13**(6): 796-800.
- [63] Lu X, Wu H, Yuan Y, et al. Manifold Regularized Sparse NMF for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2013, **51**(5): 2815-2826.
- [64] Zhu F, Yang S, Zhang X, Yao Y, et al. Geometric Nonnegative Matrix Factorization (GNMF) for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2015, **8**(6): 2696-2703.
- [65] Wang Y, Xiang S, et al. Structured Sparse Method for Hyperspectral Unmixing [J]. *Isprs Journal of Photogrammetry & Remote Sensing*, 2014, **88**(2): 101-118.
- [66] Li X, Zhou J, Tong L, et al. Structured Discriminative Nonnegative Matrix Factorization for hyperspectral unmixing [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE, 2016: 1848-1852.
- [67] Tong L, Zhou J, Qian Y, et al. Multiple graph regularized NMF for hyperspectral unmixing [C]// Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing. IEEE, 2017: 1-8.
- [68] Wang W, Qian Y, Tang Y Y. Hypergraph-Regularized Sparse NMF for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2016, **9**(2): 681-694.
- [69] Jiang X, Ma L, Yang Y. Cluster constraint based sparse NMF for hyperspectral imagery unmixing [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE, 2014: 5107-5111.
- [70] Qian Y, Xiong F, Zeng S, et al. Matrix-Vector Nonnegative Tensor Factorization for Blind Unmixing of Hyperspectral Imagery [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2017, **55**(3): 1776-1792.
- [71] Zhang Q, Wang H, Plemmons R J, et al. Tensor methods for hyperspectral data analysis: a space object material identification study [J]. *J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis*, 2008, **25**(12): 3001-12.
- [72] Favier G, Almeida A L D. Overview of constrained PARAFAC models [J]. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, 2014, 2014(1): 1-25.
- [73] Ma W, Bioucas-dias J M, Chan T, et al. A Signal Processing Perspective on Hyperspectral Unmixing: Insights from Remote Sensing [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, **31**(1): 67-81.
- [74] Zhao G, Jia X, Zhao C. Multiple endmembers based unmixing using archetypal analysis [C]. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2015: 5039-5042.
- [75] AdeleCutler, LeoBreiman. Archetypal Analysis [J]. *Technometrics*, 1994, **36**(4): 338-347.
- [76] Zhao C, Zhao G, Jia X. Hyperspectral Image Unmixing Based on Fast Kernel Archetypal Analysis [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2017, **10**(1): 331-346.
- [77] Zhao G, Zhao C, Jia X. Multilayer Unmixing for Hyperspectral Imagery With Fast Kernel Archetypal Analysis [J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2016, **13**(10): 1532-1536.
- [78] Chen P, Nelson J, Tournet J Y. Towards a Sparse Bayesian Markov Random Field Approach to Hyperspectral Unmixing and Classification [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, (99): 1-1.
- [79] Hahn J T, Zoubir A M. Bayesian Nonparametric Unmixing of Hyperspectral Images. [EB/OL]https://arxiv.org/abs/1702.08007, 2017-02-26.
- [80] Schmidt M N, Winther O, Hansen L K. Bayesian Nonnegative Matrix Factorization [C]// International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation. Springer-Verlag, 2009: 540-547.
- [81] Arngren M, Schmidt M N, Larsen J, et al. Unmixing of Hyperspectral Images using Bayesian Non-negative Matrix Factorization with Volume Prior [J]. *Signal Processing Systems*, 2011, **65**(3): 479-496.
- [82] Halimi A, Dobigeon N, Tournet J Y, et al. A new

- Bayesian unmixing algorithm for hyperspectral images mitigating endmember variability [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2015: 2469-2473.
- [83] Altmann Y, McLaughlin S, Hero A. Robust linear spectral unmixing using outlier detection [C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2015: 2464-2468.
- [84] Eches O, Benediktsson JA, Dobigeon N, et al. Adaptive Markov random fields for joint unmixing and segmentation of hyperspectral images [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, **22**(1): 5-16.
- [85] Seyedsalehi S F, Rabiee H R, Soltani-Farani A, et al. A Probabilistic Joint Sparse Regression Model for Semisupervised Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2017, **14**(5): 592-596.
- [86] Arngren M, Schmidt M N, Larsen J, et al. Unmixing of Hyperspectral Images using Bayesian Non-negative Matrix Factorization with Volume Prior [J]. *Signal Processing Systems*, 2011, **65**(3): 479-496.
- [87] Eches O, Dobigeon N, Mailhes C, et al. Bayesian estimation of linear mixtures using the normal compositional model. Application to hyperspectral imagery [J]. *IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society*, 2010, **19**(6): 1403.
- [88] Mittelman R, Dobigeon N, Hero A O. Hyperspectral Image Unmixing Using a Multiresolution Sticky HDP [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(4): 1656-1671.
- [89] Eches O, Benediktsson JA, Dobigeon N, et al. Adaptive Markov random fields for joint unmixing and segmentation of hyperspectral images [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2013, **22**(1): 5-16.
- [90] Eches O, Dobigeon N, Tournet J Y. Enhancing Hyperspectral Image Unmixing With Spatial Correlations [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2011, **49**(11): 4239-4247.
- [91] Zare A, Ho K C. Endmember Variability in Hyperspectral Analysis: Addressing Spectral Variability During Spectral Unmixing [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, **31**(1): 95-104.
- [92] Wu R, Ma W K, Fu X. A stochastic maximum-likelihood framework for simplex structured matrix factorization [C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE, 2017: 2557-2561.
- [93] Deng S, Xu Y, Li X, et al. An infinite Gaussian mixture model with its application in hyperspectral unmixing [J]. *Expert Systems with Applications*, 2015, **42**(4): 1987-1997.
- [94] Zhuang L, Bing Z, Gao L, et al. Normal Endmember Spectral Unmixing Method for Hyperspectral Imagery [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2015, **8**(6): 2598-2606.
- [95] Nascimento J M P, Bioucas-Dias J M. Hyperspectral unmixing based on mixtures of Dirichlet components [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, **50**(3): 863-878.
- [96] Hahn J T, Zoubir A M. Bayesian Nonparametric Unmixing of Hyperspectral Images. [EB/OL] <https://arxiv.org/abs/1702.08007>, 2017-02-26.
- [97] Themelis K E, Rontogiannis A A, Koutroumbas K D. A Novel Hierarchical Bayesian Approach for Sparse Semisupervised Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(2): 585-599.
- [98] Figliuzzi B, Velasco-Forero S, Bilodeau M, et al. A Bayesian Approach to Linear Unmixing in the Presence of Highly Mixed Spectra [C]// International Conference on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems. Springer International Publishing, 2016: 263-274.
- [99] Somers B, Zortea M, Plaza A, et al. Automated Extraction of Image-Based Endmember Bundles for Improved Spectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2012, **5**(2): 396-408.
- [100] Gao L, Zhuang L, Zhang B. Region-Based Estimate of Endmember Variances for Hyperspectral Image Unmixing [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2016, PP(99): 1-5.
- [101] Du X, Zare A, Gader P, et al. Spatial and Spectral Unmixing Using the Beta Compositional Model [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2014, **7**(6): 1994-2003.
- [102] Zhou Y, Rangarajan A, Gader P D. A Gaussian mixture model representation of endmember variability for spectral unmixing [C]. IEEE 2016 Eighth IEEE Grss Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing.
- [103] Clark R N, Swayze G A, Wise R, et al. USGS digital spectral library splib06a [J]. *Data*, 2007.
- [104] Tang W, Shi Z, Wu Y, et al. Sparse Unmixing of Hyperspectral Data Using Spectral A Priori Information [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2016, **53**(2): 770-783.
- [105] Yang J, Zhao Y Q, Chan J C W, et al. Coupled sparse denoising and unmixing with low-rank constraint for hyperspectral image [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, **54**(3): 1818-1833.
- [106] Chen F, Zhang Y. Sparse Hyperspectral Unmixing Based on Constrained  $l_{p-2}$  Optimization [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2013, **10**(5): 1142-1146.
- [107] Iordache M D, Bioucas-Dias J M, Plaza A. Collaborative Sparse Regression for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2014, **52**(1): 341-354.
- [108] Wang D, Shi Z, Tang W. Collaborative sparse unmixing of hyperspectral data using  $L_2, P$  norm [C]//IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), IEEE 2016: 6978-6981.
- [109] Sun L, Jeon B, Zheng Y, et al. Hyperspectral unmixing based on  $L_1$ - $L_2$  sparsity and total variation [C]//IEEE International Conference on Image Processing, IEEE, 2016: 4349-4353.
- [110] Wang R, Li H C, Liao W, et al. Double reweighted sparse regression for hyperspectral unmixing [C]// IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), IEEE 2016: 6986-6989.
- [111] Giampouras P V, Themelis K E, Rontogiannis A A, et al. Simultaneously Sparse and Low-Rank Abundance Matrix Estimation for Hyperspectral Image Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2016, **54**(8): 4775-4789.
- [112] Ma Y, Li C, Mei X, et al. Robust Sparse Hyperspectral

- Unmixing With L21 Norm [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2017, **55**(3): 1227-1239.
- [113] Aggarwal H K, Majumdar A. Hyperspectral unmixing in the presence of mixed noise using joint-sparsity and total variation [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2016, **9**(9): 4257-4266.
- [114] Li C, Chen X, Jiang Y. On Diverse Noises in Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2015, **53**(10): 5388-5402.
- [115] Li C, Zhou A, Zhang G, et al. An Antinoise Method for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2015, **12**(3): 636-640.
- [116] Wang Y, Pan C, Xiang S, et al. Robust hyperspectral unmixing with correntropy-based metric [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, **24**(11): 4027-4040.
- [117] Zhu F, Halimi A, Honeine P, et al. ADMM for maximum correntropy criterion [C]. *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, 2016: 1420-1427.
- [118] YUAN Jing, ZHANG Yu-jin. Sparse and Low-Rank Abundance Estimation with Structural Information [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (袁静, 章毓晋. 融入结构信息的稀疏低秩丰度估计在光谱解混中的应用. *红外毫米波学报*), 2018, **37**(2): 152-161.
- [119] Meyer T R, Drumetz L, Chanussot J, et al. Hyperspectral unmixing with material variability using social sparsity [C]// *IEEE International Conference on Image Processing*. IEEE, 2016: 2187-2191.
- [120] Zheng C Y, Li H, Wang Q, et al. Reweighted Sparse Regression for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2015, **54**(1): 479-488.
- [121] Iordache M D, Bioucas-Dias J M, Plaza A. Total Variation Spatial Regularization for Sparse Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2012, **50**(11): 4484-4502.
- [122] Xu N, Xiao X, Geng X, et al. Spectral-spatial constrained sparse unmixing of hyperspectral imagery using a hybrid spectral library [J]. *Remote Sensing Letters*, 2016, **7**(7): 641-650.
- [123] Rizkinia M, Okuda M. Local abundance regularization for hyperspectral sparse unmixing [C]// *Signal and Information Processing Association Summit and Conference*. IEEE, 2017: 1-6.
- [124] Yingying Xu, Faming Fang, Guixu Zhang. Similarity-Guided and Lp-Regularized Sparse Unmixing of Hyperspectral Data [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2015, **12**(11): 2311-2315.
- [125] Bieniarz J, Aguilera E, Zhu X X, et al. Joint Sparsity Model for Multilook Hyperspectral Image Unmixing [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2014, **12**(4): 696-700.
- [126] Yuan Y, Feng Y, Lu X. Projection-Based NMF for Hyperspectral Unmixing [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2015, **8**(6): 2632-2643.
- [127] Zhong Y, Feng R, Zhang L. Non-Local Sparse Unmixing for Hyperspectral Remote Sensing Imagery [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2014, **7**(6): 1889-1909.
- [128] Feng R, Zhong Y, Zhang L. An Improved Nonlocal Sparse Unmixing Algorithm for Hyperspectral Imagery [J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*, 2015, **12**(4): 915-919.
- [129] Feng R, Zhong Y, Zhang L. Adaptive Spatial Regularization Sparse Unmixing Strategy Based on Joint MAP for Hyperspectral Remote Sensing Imagery [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2016, **9**(12): 5791-5805.
- [130] Wang R, Li H C, Liao W, et al. Centralized Collaborative Sparse Unmixing for Hyperspectral Images [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing*, 2017, PP(99): 1-14.