

# 大光斑 LiDAR 全波形数据小波变换的高斯递进分解

杨学博<sup>1,2</sup>, 王成<sup>1\*</sup>, 刁晓环<sup>1</sup>, 田建林<sup>3</sup>, 聂胜<sup>1</sup>, 朱笑笑<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院遥感与数字地球研究所 数字地球重点实验室,北京 100094;

2 中国科学院大学,北京 100049;

3 中山大学 地理科学与规划学院,广东 广州 510275)

**摘要:** 高斯分解是波形激光雷达数据预处理的常用方法,但在应用于大光斑全波形激光雷达数据中的叠加波时却难以发挥作用,为此提出一种基于小波变换的高斯递进波形分解方法. 首先,利用小波变换多尺度分析特性检测出目标地物并准确估算组分特征参数,进而建立高斯模型优化特征参数;然后通过拟合精度指标,判断是否需要添加新组分进行逐级递进分解,确定最终模型及其组分构成,最终实现全波形激光雷达数据的波形分解. 为了验证算法的有效性,分别对实验数据使用本文算法和常用的基于拐点匹配的高斯分解法进行分析,结果表明,本文算法提取的目标数几乎是拐点匹配算法的 2 倍,可以有效地从叠加波中检测出目标组分,且拟合精度高于 98%.

**关键词:** 大光斑激光雷达;全波形分析;小波变换;高斯分解;特征参数

**中图分类号:** P237 **文献标识码:** A

## Wavelet transform of Gaussian progressive decomposition method for full-waveform LiDAR data

YANG Xue-Bo<sup>1,2</sup>, WANG Cheng<sup>1\*</sup>, XI Xiao-Huan<sup>1</sup>, TIAN Jian-Lin<sup>3</sup>, NIE Sheng<sup>1</sup>, ZHU Xiao-Xiao<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Digital Earth Science, Institute of Remote Sensing and Digital Earth,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Geography and Planning, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Gaussian decomposition is a commonly used method for waveform analysis, which is a key post-processing step for the applications of large footprint LiDAR data. However, it usually fails to detect the overlapping pulses of large-footprint waveform data. Therefore, a Gaussian progressive decomposition method based on wavelet transform was proposed in this study to address this issue and applied to Ice, Cloud, and land Elevation Satellite / Geoscience Laser Altimeter System (ICESat/GLAS) data. The new proposed method mainly consists of three key steps. First, the wavelet transform was adopted to detect the target features and estimate the component feature parameters, then the Gaussian model was established to optimize the feature parameters. Second, a new component was added if the fitting accuracy didn't meet the requirements. Finally, waveform decomposition based on wavelet transform was completed until no more new components were added. Additionally, a comparison experiment between the new proposed method and the Gaussian decomposition method based on inflection point was also conducted to verify the reliability of the new proposed algorithm. Experiment results indicated that our new proposed algorithm can detect twice targets as many as the method based on inflection point, and effectively decompose the targets from overlapping waveforms due to high fitting accuracy of above 98%.

收稿日期:2017-04-17,修回日期:2017-09-14

Received date: 2017-04-17, revised date: 2017-09-14

基金项目:国家重点研发计划资助(2017YFA0603002),国家自然科学基金面上项目(41271428)

Foundation items: Supported by National Key R&D Program of China (2017YFA0603002), and National Natural Science Foundation of China (41271428)

作者简介(Biography): 杨学博(1995-),女,山西吕梁人,博士研究生,研究方向为激光雷达遥感. E-mail: yangxb@radi.ac.cn

\* 通讯作者(Corresponding author): E-mail: wangcheng@radi.ac.cn

**Key words:** large footprint LiDAR, full-waveform analysis, wavelet transform, Gaussian decomposition, feature parameter

**PACS:** 95. 75. Rs; 84. 40. Xb

## 引言

LiDAR(Light Detection And Ranging, LiDAR)是近 20 年发展迅猛的主动遥感技术,可以直接、快速获取目标地物的三维空间信息<sup>[1]</sup>.按照回波(Laser Return)记录方式的不同,LiDAR 系统可分为波形 LiDAR 系统和离散 LiDAR 系统.前者可以极小的间隔对地物的回波信号进行采样,获取的波形数据含有丰富的地物垂直结构信息,特别是星载波形 LiDAR(如 ICESat/GLAS),可获取全球地表的回波信息,在全球高程获取、森林结构参数和生物量估算等方面发挥了重要作用<sup>[2-4]</sup>.

波形分解是全波形 LiDAR 数据处理的重要内容,也是其定量应用的关键.虽然有学者利用波形模拟方法进行了相关研究,如 Sun 等<sup>[5]</sup>的三维激光雷达回波模拟模型, Ni-Meister 等<sup>[6-7]</sup>的激光雷达 GORT 模型,但目前应用较多的还是通过建立波形分解模型进行分析. Wagner 等<sup>[8]</sup>最早提出利用高斯模型拟合波形数据,并采用高斯分解算法开展机载全波形 LiDAR 数据的波形分解,获得了较高的拟合精度. Chauve 等<sup>[9]</sup>利用非线性最小二乘法中的 LM(Levenberg-Marquardt)算法有效拟合并检测回波组分,应用于后向散射回波波形分解.针对小光斑激光雷达波形数据,马洪超等<sup>[10]</sup>采用 EM(Expectation-Maximization)算法,实现了高斯混合模型参数的最大似然估计;赖旭东等<sup>[11]</sup>则采用迭代分解方法,提高了分解后的点云数据的测距精度.覃驭楚等<sup>[12]</sup>采用逐级递进分解高斯混合模型的策略,利用高斯函数低阶分解的先验知识避免了分解过程陷入局部优化.赵泉华等<sup>[13]</sup>通过波形能量函数设计 RJMCMC(Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo)算法模拟后验概率,自动确定波形数并完成可变量高斯分解.戴璨等<sup>[14]</sup>提出使用粒子群算法与最小二乘法相结合的分解方法,一定程度上抑制了噪声的拟合,但参量拟合算法、初始参数获取都会对分解结果产生较大影响. LM 和 EM 算法的最大优点在于简单、稳定,但经过若干次的迭代计算达到收敛,容易陷入局部最优解,其最终解和初始值的选取有较大关系.粒子群算法、迭代分解、逐级递进分解、自动确定波形数都是对初值估算的改进,可估算出高斯模型参

数,但这些参数的获取都需依赖一定的特征参考信息.

目前对波形 LiDAR 数据分解的研究大多针对波形拟合优化算法,而对于如何精确分解出波形数据所包含的目标个数研究较少,并且现有的研究尚未很好地分离叠加波,也难以识别弱波.而在波形数据中,叠加波和弱波是影响目标个数估计的主要因素.叠加波是由几个高度相近的组分形成的合成信号,用常规的高斯分解法很容易错误地被分解为一个地物目标,最后得到的拟合结果精度较低,甚至提取的地物参数与实际情况并不相符,无法进行后续应用.弱波是由光斑中的盖度较小的地物目标形成的微弱信号,信噪比低,常规的高斯分解法难以将其与噪声分离,导致目标组分缺失. Lin 等<sup>[15]</sup>指出目标个数的错误估计对后续应用的影响不可恢复.王金虎<sup>[16]</sup>也指出,波形分解过程中不能将所有组分进行分解提取是导致波形分解不完整和误差大、效率低的一个重要因素.而小波变换在时频两域都具有表征信号局部特征的能力和分辨率分析的特性,因此在信号处理和分析等领域得到了广泛地应用<sup>[17]</sup>.同时 Shao 等<sup>[18]</sup>采用小波变换对多组分重叠模拟波形的研究, Jiao 等<sup>[19]</sup>采用连续小波变换对重叠峰的定量化研究,都发现小波变换可以简单快速地检测多组分重叠波形的波形个数.

本文针对大光斑全波形 LiDAR 波形数据中叠加波、弱波难以解析的问题,提出一种基于小波变换的高斯递进分解方法.介绍了该算法的具体工作流程和相关算法(第一部分),通过多次实验验证以及和不同方法的比较,验证了本文方法的精度和有效性(第二部分),总结了本文算法的优缺点并对下一步研究方向进行讨论(第三部分).

## 1 研究方法

以 ICESat/GLAS 大光斑全波形激光雷达数据为例,基于小波变换的高斯递进分解流程如图 1.

1) 数据预处理. 由于 GLAS 数据存在较高的背景噪声,不利于波形信号提取,需预处理后再进行下一步分解. 预处理操作包括电压值转换、波形解压缩、滤波去噪等.

2) 小波变换提取波形参数. 利用多尺度小波变

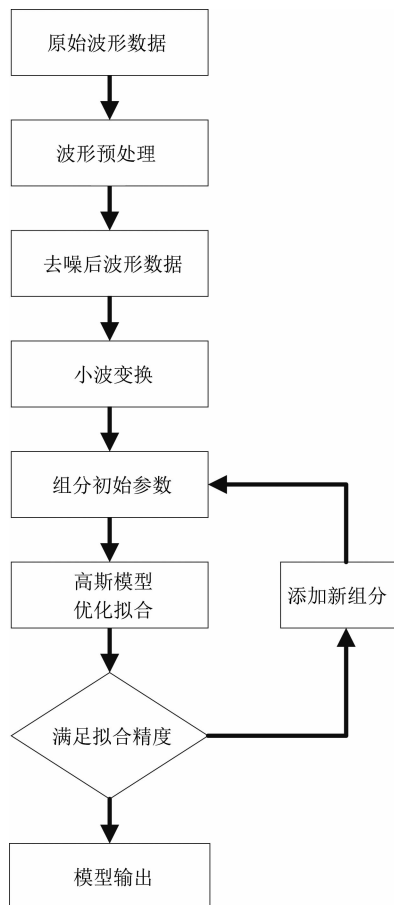


图1 基于小波变换的高斯递进分解法处理流程  
Fig.1 Process flow of Gaussian progressive decomposition based on wavelet transform

换对预处理后的波形数据进行分解,获取波形的组分个数及每个组分的初始参数.经过多次试验,本研究选用和高斯函数相近的 sym6 小波对叠加波进行分解,并从高频细节系数中获取初始组分参数.

3) 组分建模与拟合,获取幅值最大的组分初始参数进行拟合.选用广义高斯函数作为组分的建模模型,在非线性最小二乘准则下进行优化拟合,将其带入建模模型以拟合预处理后的波形数据.

4) 判断拟合精度是否满足要求.若达到拟合精度的期望值则停止,若获得拟合最优解时误差期望未满足则进入新组分的拟合,重复步骤 3,本次迭代的结果输入下一次迭代中作为初始控制信息进行新组分的拟合,直到达到迭代终止的条件.

经过上述处理得到拟合后的波形,且从最终优化拟合得到的参数中可以获得波形数据的组分个数、振幅、波宽、位置等特征.

小波变换方法具有多尺度分析的特性,在微弱信号、瞬态信号等的检测中有独特的优越性;高斯模

型作为波形分量建模模型,通过调整其形状参数即可有效地逼近原始数据,提高拟合精度.具体方法如下.

### 1.1 小波变换

小波变换是一种窗口大小固定、形状可变的时频局部化信号分析方法,可看作原始信号与小波函数的卷积<sup>[20]</sup>.连续小波变换用式(1)和(2)表示为:

$$W_{f(a,b)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad , \quad (1)$$

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \quad (2)$$

式中,  $\Psi(t)$  称为基本小波或母小波,  $\Psi_{a,b}(t)$  为小波函数;  $a$  为尺度因子,  $b$  为位置因子.  $\Psi_{f(a,b)}$  为  $f(t)$  在尺度  $a$  下的高频逼近,也可称为小波系数,反映小波函数在尺度  $a$  下位置  $b$  处与原始波形数据的相似性,小波系数越大,相似性越高.

Wang 等<sup>[21]</sup>采用连续小波基 Marr 对 GLAS 波形数据进行了小波变换的多尺度分析,发现小波基的尺度不同,对回波信号的逼近强度也不同,可通过对回波波形进行小波分析得到回波波形的峰值信息.

在 GLAS 波形分析中,波形数据为离散信号,本文采用与高斯函数相似的离散小波基 sym6 来进行小波变换,将原信号分解为低分辨率的逼近信号和高分辨率的细节信号,利用多尺度分析从低频逼近系数重构波形中获取波形组分信息.图 2 是不同尺度的小波应用于波形数据的结果:小尺度小波变换能够得到两个波峰,且正确地重构出叠加波形;而大尺度小波变换不能正确地分解叠加波形,会丢失很多细节信息.

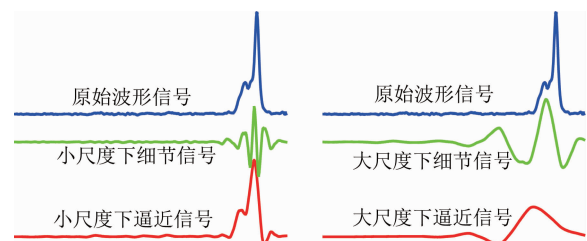


图2 不同尺度的小波变换应用于波形数据的结果  
Fig.2 Results of wavelet transform applied to waveform data with different scales

小波变换在时频两域都具有表征信号局部特征的能力和尺度分析的特性,使其在信号处理与分析中显示出独特的优越性.利用多尺度小波变换对波形数据进行处理时,即使信号特征微弱,小波变换仍然能够检测出信号细节;检测合成信号时,高频细

节信号也能检测到各子信号的峰值位置. 这对波形数据处理中分离叠加波与识别弱波提供了极大的帮助. 但由于小波变换对信号变换的敏感性, 常常出现误检测和过检测现象. 在弱信号的检测中, 为避免将噪声信号误检测为弱信号, 应该在预处理过程中进行去噪, 在小波变换提取目标组分过程中通过设定组分必须在有效信号范围内、组分展宽必须大于发射波形展宽等一系列条件对检测到的组分进行筛选. 在地面信号的检测中, 为避免小波变换过检测而出现的伪组分(实际不存在的目标)情况, 也应该在小波变换提取目标组分过程中提出约束条件滤除伪组分.

## 1.2 高斯递进分解

假设全波形 LiDAR 数据为理想条件下多个高斯函数的叠加<sup>[22]</sup>, 那么回波波形可用式(3)描述:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\frac{(x-b_i)^2}{c_i^2}} \quad (3)$$

式中,  $n$  为高斯分量的个数;  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$  为第  $i$  个高斯分量的特征参数;  $y$  为  $x$  时刻回波的幅值.

通过小波变换得到初始估算参数后, 为进一步提高高斯函数模型拟合精度, 需进一步对其进行优化. 本文采用 LM (Levenberg-Marquardt) 算法开展高斯混合模型初始参数优化, 该算法吸收了梯度下降法和高斯牛顿法的优点, 计算效率高. 首先设定拟合函数并设置初始化参数和阻尼系数, 计算拟合函数的雅克比矩阵和海森伯矩阵, 进而求解估计值与原始值误差, 获取误差内积, 通过不断迭代直到拟合误差达到最小时停止迭代<sup>[23]</sup>. 当比例系数为 0, 则为高斯牛顿法; 当比例系数很大, LM 算法接近梯度下降法. 算法的每次迭代都对比例系数进行自适应调整, 使结果快速收敛达到最优解; 但 LM 算法极易形成局部最优解. 在本文基于小波变换的高斯分解算法中, 小波变换可以从叠加波中检测出目标地物得到拟合初始参数, 初始参数具有较高参考价值, 只需再对其形状参数进行简单优化调整, 不需追求拟合精度而进行全局拟合.

为使拟合时各组分间不互相干扰, 采用高斯递进分解法逐组分分解, 将上次迭代的结果输入下一次迭代作为初始控制信息, 即先剥离得到的组分波峰参数作为下一次迭代的初始条件, 直到达到迭代终止为止.

## 2 实验与讨论

实验数据为 ICESat/GLAS 数据, 主要利用了包

含原始波形数据的标准数据产品 GLA01 数据, 其每一个脚点都有一个波形数据文件, 包含的回波记录样本为 200 或 544. 正常情况下, GLAS 接收来自海洋或海冰上的信号为 200 个回波记录样本, 而接收来自冰盖与陆地上的回波波形记录采样为 544 个. 试验选取波形数据均为陆地回波数据, 共选取了 6 条典型波形数据和 40 条随机波形数据分别进行实验和验证.

### 2.1 小波变换结果

图 3 是原始波形、预处理后波形与小波变换结果. 其中, 横坐标为采样间隔, 纵坐标是辐射定标后的真实电压值, 青色实线是原始波形, 蓝色实线是预处理后波形, 绿色和红色分别是小波变换第 4 尺度的低频逼近系数重建波形 (approximation coefficients) 和高频细节系数重建波形 (details coefficients).

分析图 3 发现, 预处理能有效消除原始波形中的高频振荡信号, 同时保留绝大部分有效信号. 但是图 3(d) 由于高斯滤波的平滑作用, 原始波形 901 帧和 911 帧处的局部最大值特征在预处理后减少了一个, 导致波宽变大; 图 3(f) 中原始波形 676 和 709 帧处的局部最大值特征在预处理后消失. 这些重要特征的消失和变化可能会影响波形中目标个数的检测. 低频逼近系数重构波形可以反映预处理后波形, 同时由表 1 可知, 低频逼近系数重建波形与预处理后波形的残差值基本都在 0.3 以内, 但图 3(a)、3(b) 和 3(e) 在峰值部分都出现了较大的差别, 其最大残差绝对值分别为 0.4638、0.3751、0.3894, 表明可能存在有未被检测出的目标. 这与小波变换的尺度有关, 可以通过降低尺度后, 再次进行小波变换和目标检测.

表 1 小波变换后低频逼近信号重建波形与预处理后波形的残差值

Table 1 Residual between the low frequency approximation signals reconstruction waveform after wavelet transform and waveform after preprocessing

No.	$R_{\min}$	$R_{\max}$
a	-0.4638	0.3856
b	-0.3633	0.3751
c	-0.1262	0.2654
d	-0.1029	0.2236
e	-0.3894	0.2672
f	-0.2075	0.2553

对于叠加波和弱波目标的检测, 高频细节系数重构波形中的小波与预处理后波形波峰所在位置大

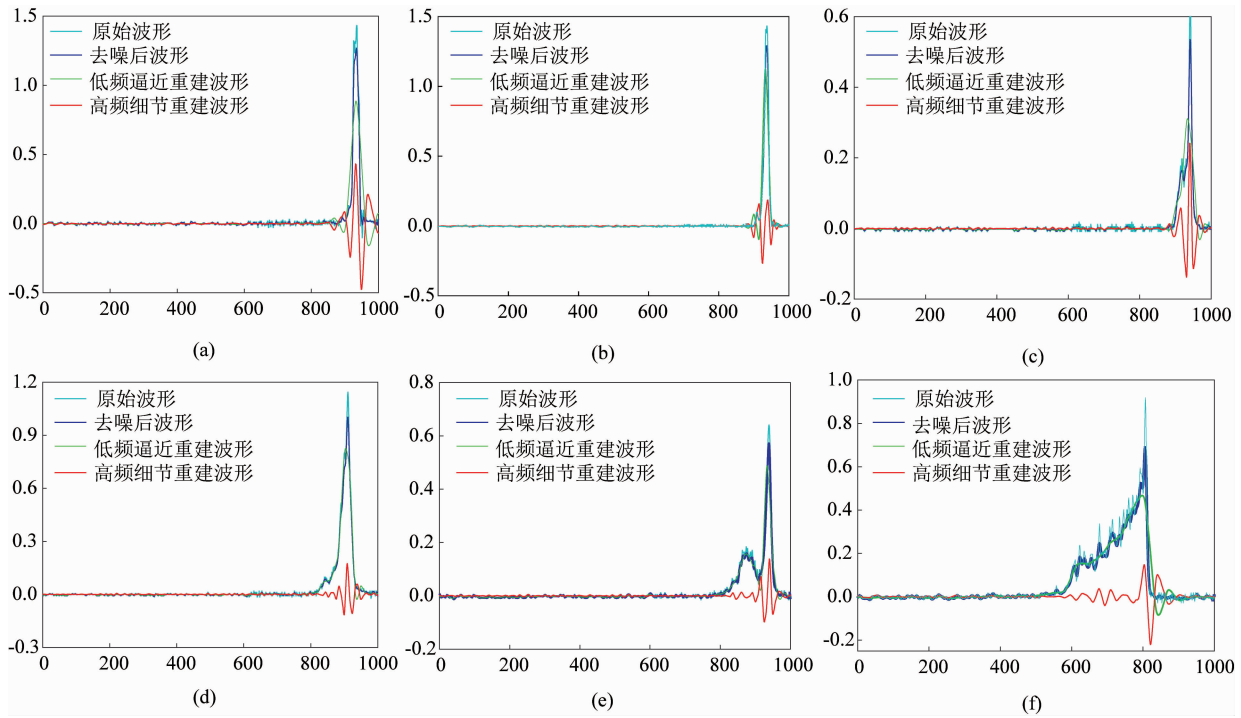


图3 原始数据、预处理后数据与小波变换结果  
 Fig.3 Results of raw data, preprocessing waveform and wavelet transform

致相似,这些小波的波形位置就是预处理后波形中目标的位置,这表明小波变换可以有效地检测叠加波中的隐藏目标.但高频细节中的小波也存在错误,如图3(a)、3(d)、3(f)中高频细节重建波形的最后一个小波,这些小波对应的预处理后波形没有明显的目标存在.通过查看这些小波附近的原始波形和预处理后波形可知,最后一个小波大多存在于地面波形之后,为了避免出现伪组分(实际不存在的目标)的情况,需对高频检测出的小波增加约束条件,在确定初始目标数时,地面波形后的小波都应被排除掉.

由小波高频细节系数重建波形发现,虽然预处理后波形中的部分局部最大值特征消失或变换,但使用小波变换仍能检测出叠加波中的子波位置.图3(d)由于高斯滤波的平滑作用,原始波形的局部特征已经完全变成一个波宽较大的波形,但小波变换可检测出这种变化;图3(f)在预处理后部分波形的局部最大值特征消失,小波变换仍然能检测出其特征.

综上所述,尽管预处理操作使原始波形的局部最大值特征消失或弱化,小波变换还是能从预处理后的叠加波和弱波中检测出这种变化,从而有效地检测出波形中的目标组分.

### 2.2 波形分解结果

图4是基于小波变换的波形分解结果.其中,第一条蓝色实线是预处理后波形,第二条红色实线是最终优化拟合得到的波形数据,介于第三条和最后一条之间的实线是分解得到的各高斯组分,最后一条是小波变换第4尺度的高频细节系数重建波形.

表2 基于小波变换的高斯分解法对实验波形数据分解后的拟合精度

Table 2 Fitting accuracy of measured waveform data after decomposition by Gaussian progressive decomposition method based on wavelet transform

No.	SSE	$R^2$	RMSE	$R_{max}$
a	0.3680	0.9843	0.0192	0.1492
b	0.1246	0.9929	0.0112	0.1026
c	0.0189	0.9933	0.0044	0.0299
d	0.0860	0.9952	0.0093	0.0746
e	0.0267	0.9943	0.0052	0.0309
f	0.0786	0.9950	0.0089	0.0347

分析图4发现,小波变换能够从叠加波中正确地检测出目标,且得到的拟合波形效果较好.结合表2可知,拟合波形的残差平方和(SSE)都在0.2以下,图4(a)残差平方和最大;拟合相关系数( $R^2$ )都在0.98以上;均方根误差(RMSE)都在0.02以下;残差最大值( $R_{max}$ )都在0.2以下,图4(a)和4(b)的效果

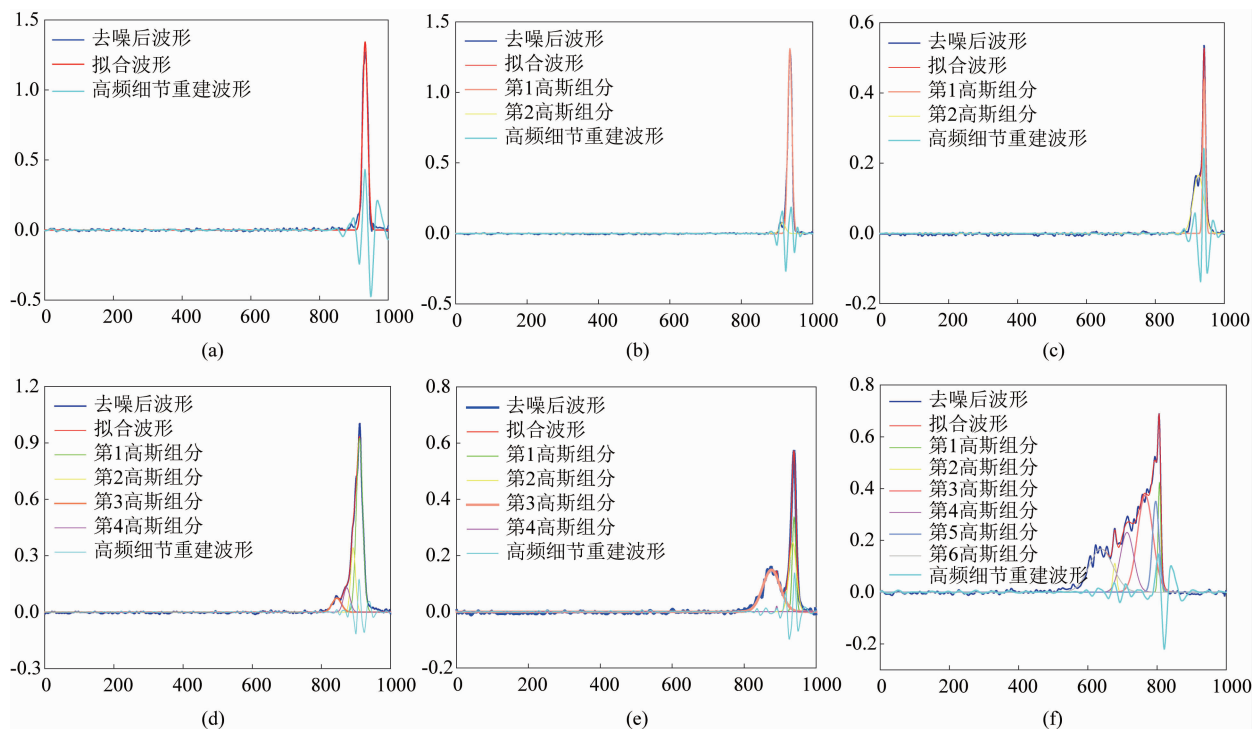


图4 典型波形数据分解结果

Fig. 4 Decomposition results of typical waveform data

最差,分别为0.1492和0.1026,其他都在0.1以下。

表3 两种算法对实验数据检测出的目标数及拟合精度  
Table 3 Root-mean-square error and number of objects within the waveform data detected by two methods

No.	小波变换法		拐点匹配法	
	RMSE	N	RMSE	N
a	0.0192	1	0.0192	1
b	0.0112	2	0.0112	2
c	0.0044	2	0.0043	2
d	0.0093	4	0.0154	2
e	0.0052	4	0.0163	3
f	0.0089	6	0.0247	4

使用本文算法和常用的基于拐点匹配的高斯分解法对实验数据和验证数据进行处理. 选取拟合精度均方根误差(RMSE)、分解组分个数( $N$ )作为评价指标,力求在波形分解过程中提高拟合精度的同时,精确确定目标组分个数和位置等. 由图4和表3分析发现,常用的拐点匹配法从每条波形数据中检测出的组分数都较少,且拟合精度较差,本文算法得到的组分几乎是常用方法的2倍,且拟合精度都达到98%. 对图4(d),小波变换法比高斯拐点法多分解出两个组分,且小波变换分解结果得到的第2、3组分与原始波形中局部最大值相对应(图3(d)),

因此基于小波变换的高斯分解法符合实际;而高斯拐点法分解结果中上述第2、3、4组分变为一个波宽更大的组分. 就分解结果而言,这两个分解结果都可接受,但如认为最后一个组分是地面,即得到两个完全不同的地面。

为验证算法的有效性,抽取40条数据进行实验和统计,结果如表4. 可以看出,小波变换法检测为6条单波峰数据和34条多波峰数据,而使用拐点匹配法检测为13条单波峰数据和27条多波峰数据. 可以发现,小波变换法能检测出多于或等于拐点匹配法的组分数,且拟合精度优于拐点匹配法,这可能与基于拐点匹配的高斯分解法会对波形进行一定的删除与合并有关。

表4 两种算法对验证数据的统计结果  
Table 4 Statistical results within the validation waveform data detected by two methods

组分数 $N$	小波变换法		拐点匹配法	
	波形数 Num	RMSE	波形数 Num	RMSE
1	6	0.0104	13	0.0241
2	7	0.0093	9	0.0202
3	8	0.0077	5	0.0228
4	8	0.0069	7	0.0179
5	6	0.0057	4	0.0254
6	5	0.0081	2	0.0319
合计	40	0.0080	40	0.0225

### 3 结论

针对大光斑全波形激光雷达数据中叠加波和弱波解析难的问题,提出了一种基于小波变换的高斯递进分解法,即在高斯分解算法中引入了小波变换方法,并利用多尺度分析提取组分参数,最后通过 LM 算法进行优化递进拟合,实现波形数据有效分解.应用于不同地物目标并对拟合结果进行统计分析,表明利用小波变换能有效地从叠加波中检测目标,也有效地检测出弱波.本文方法还存在一些需要改进之处,如小波变换对于信号检测异常敏感,因此在叠加波检测中普遍会出现过检测现象,例如在靠近地面的回波信号检测中,如何判断其是低矮地物回波还是由于地形起伏造成的回波等,故如何通过添加约束条件避免误检测问题是本文方法需要进一步探究的难点.

### References

- [1] WANG Cheng, XI Xi-Huan, LUO She-Zhou, *et al.* *Data processing and application of spaceborne LiDAR* [M]. Beijing: Science Press(王成, 刁晓环, 骆社周, 等. 星载激光雷达数据处理与应用. 北京: 科学出版社), 2015.
- [2] Lefsky M A, Cohen W B, Harding D J, *et al.* LiDAR remote sensing of above-ground biomass in three biomes[J]. *Global Ecology & Biogeography*. 2002, **11**(5): 393–399.
- [3] Gong P, Li Z, Huang H B, *et al.* ICESat GLAS Data for urban environment monitoring [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*. 2011, **49**(3): 1158–1172.
- [4] LI Zhan. 3D extraction of urban buildings based on ICESat/GLAS data[D]. Beijing: Institute of Remote Sensing Application Chinese Academy of Sciences(李展. 基于 ICESat GLAS 数据提取城市建筑物的三维信息. 北京: 中国科学院遥感应用研究所), 2011.
- [5] Sun G Q, Ranson K J. Modeling LiDAR returns from forest canopies[J]. *Geoscience & Remote Sensing IEEE Transactions on*. 2000, **38**(6): 2617–2626.
- [6] Ni-Meister W, Strahler A H, Woodcock C E, *et al.* Modeling the hemispherical scanning, below-canopy LiDAR and vegetation structure characteristics with a geometric-optical and radiative-transfer model[J]. *Canadian Journal of Remote Sensing*. 2008, **34**(S2): S385–S397.
- [7] Ni-Meister W, Jupp D L B, Dubayah R. Modeling LiDAR waveforms in heterogeneous and discrete canopies [J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*. 2001, **39**(9): 1943–1958.
- [8] Wagner W, Ullrich A, Ducic V, *et al.* Gaussian decomposition and calibration of a novel small-footprint full-waveform digitising airborne laser scanner[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing*. 2006, **60**(2): 100–112.
- [9] Chauve A, Mallet C, Bretar F, *et al.* Processing full-waveform LiDAR data: modelling raw signals[C]. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 36 (Part 3/W52). 2008: 102–107.
- [10] Ma H C, Li Q. Modified EM algorithm and its application to the decomposition of laser scanning waveform data[J]. *Journal of Remote Sensing*. 2009, **13**(1): 35–41.
- [11] LAI Xu-Dong, QIN Nan-Nan, HAN Xiao-Shuang, *et al.* Iterative decomposition method for small foot-print LiDAR waveform[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves* (赖旭东, 秦楠楠, 韩晓爽, 等. 一种迭代的小光斑 LiDAR 波形分解方法. *红外与毫米波学报*), 2013, **32**(4): 319–324.
- [12] QIN Yu-Chu, LI Bin, NIU Zheng, *et al.* Stepwise decomposition and relative radiometric normalization for small footprint LiDAR waveform[J]. *Sci China Earth Sci*(覃驭楚, 李斌, 牛铮, 等. 小光斑激光雷达全波形数据递进分解与相对辐射校正. *中国科学: 地球科学*), 2011, **41**(1): 103–109.
- [13] ZHAO Quan-Hua, LI Hong-Ying, LI Yu. Gaussian mixture with variable components for full-waveform LiDAR data decomposition and RJMCMC algorithm[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*(赵泉华, 李红莹, 李玉. 全波形 LiDAR 数据分解的可变分量高斯混合模型及 RJMCMC 算法. *测绘学报*), 2015, **44**(12): 1367–1377.
- [14] DAI Can, WANG Yuan-Qing, XU Fan. 3-D LiDAR echo decomposition based on particle swarm optimization[J]. *Laser Technology*(戴璨, 王元庆, 徐帆. 基于粒子群算法的 3 维激光雷达回波分解. *激光技术*), 2016, **40**(2): 284–287.
- [15] Lin Y C, Mills J P, Smithvoysey S, *et al.* Rigorous pulse detection from full-waveform airborne laser scanning data [J]. *International Journal of Remote Sensing*. 2010, **31**(5): 1303–1324.
- [16] WANG Jin-Hu. Full-waveform LiDAR data processing and application technology [D]. Beijing: Institute of Remote Sensing Application Chinese Academy of Sciences(王金虎. 全波形激光雷达数据处理与应用技术研究. 北京: 中国科学院遥感应用研究所), 2012.
- [17] MA Peng-Ge, LIU Yi, QI Lin, *et al.* Wavelet filter algorithm for echo signal of pulsed LiDAR at low SNR[J]. *Electronics Optics & Control*(马鹏阁, 柳毅, 齐林, 等. 低信噪比下脉冲激光雷达回波信号小波域滤波算法. *光电与控制*), 2011, **4**(04): 26–29.
- [18] SHAO Xue-Guang, CAI Wen-Sheng, SUN Pei-Yan. Determination of the component number in overlapping multi-component chromatogram using wavelet transform[J]. *Chromometrics & Intelligent Laboratory Systems*. 1998, **43**(1): 147–155.
- [19] JIAO Long, GAO Su-Ya, ZHANG Fang, *et al.* Quantification of components in overlapping peaks from capillary electrophoresis by using continuous wavelet transform method [J]. *Talanta*. 2008, **75**(4): 1061–1067.
- [20] ZHANG De-Feng. *Wavelet analysis in Matlab. Second Edition* [M]. Beijing: China Machine Press(张德丰. *MATLAB 小波分析. 第 2 版*. 北京: 机械工业出版社), 2012.
- [21] Wang C, Tang F X, Li L W, *et al.* Wavelet analysis for ICESat/GLAS waveform decomposition and its application in average tree height estimation[J]. *IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters*. 2013, **10**(1): 115–119.
- [22] Brenner A C, Zwally H J, Bentley C R, *et al.* Derivation of range and range distributions from laser pulse waveform analysis for surface elevations, roughness, slope, and vegetation heights [J]. *Algorithm Theoretical Basis Document* v4.1, 2003.
- [23] Madsen K, Nielsen H B, Tingleff O. *Methods for nonlinear least squares problems* [M]. Denmark: Press of Technical University of Denmark, 2004.