

含圆柱夹杂功能梯度板条中的热波散射问题

马晓波*, 姜欢琦

(同济大学 机械与能源工程学院, 上海 201804)

摘要:采用复变函数法和镜像法,研究了功能梯度板条结构中含圆柱亚表面夹杂的热波散射问题.基于双曲型热传导方程,求解了含圆柱亚表面夹杂板条中热波散射与温度场,并给出了温度场的一般解.温度波由调制光束在材料表面激发,板条上下表面的热边界条件为表面温度等于环境温度.分析了夹杂的几何参数和热物性参数对板条左表面温度的影响,如板条的宽度和非均匀参数对板条表面温度的影响.可望为功能梯度材料的红外热波无损检测提供计算方法和参考数据.

关键词:复变函数与镜像方法;功能梯度材料板条;非傅里叶热传导方程;圆柱缺陷;热波无损检测

中图分类号:TK124;TN247 **文献标识码:**A

Thermal wave scattering in slabs of FGM with cylindrical subsurface inclusion

MA Xiao-Bo*, JIANG Huan-Qi

(School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Using the complex function and the image method, thermal wave scattering in the slab of functionally graded materials with a cylindrical subsurface inclusion was investigated. Based on the Non-Fourier's heat conduction equation, the temperature field in the slab of FGM with a cylindrical subsurface inclusion was analyzed. The analytical solution of the scattered field of thermal waves in the slab of FGM was obtained. The temperature wave is excited at the surface of FGM by the periodically modulated beam. The upper and lower temperatures are the environmental temperature. The influence of the geometrical and thermophysical parameters of the cylindrical inclusion on the temperature at the frontal surface of FGM was calculated. The results of this paper are expected to provide calculation methods and reference data for infrared thermal wave nondestructive testing of functionally graded materials.

Key words: complex function method and image method, slab of functionally graded materials, non-Fourier's heat conduction equation, cylindrical subsurface inclusion, nondestructive testing by thermal wave

PACS: 44.10.+i, 44.90.+c

引言

为满足现代科技和国防武器热防护材料结构的需要,在工程中人们开始采用功能梯度材料^[1].功能梯度材料是根据特殊的服役环境要求,使两种不同的物理和力学性能的材料复合在一起,材料中间的组分呈连续梯度变化,消除明显的材料界面,从

而优化材料使用和充分利用不同材料的物理性能和强度^[2].功能梯度材料中不可避免地会存在空隙和渗进杂质等,在其使用过程中空隙和杂质将会引起各种损伤现象,损伤积累到一定程度就会造成材料性能急剧下降影响功能梯度材料的强度与可靠性.

现有针对新型复合材料的无损检测方法基本上沿用以往金属材料的检测方法,以超声波法和声阻

收稿日期:2015-04-21,修回日期:2015-10-19

基金项目:国家自然科学基金面上项目(51276129)

Foundation items: Supported by National Natural Science Foundation of China (51276129)

作者简介 (Biography): 马晓波(1965-),女,黑龙江哈尔滨人,博士,副教授,主要从事工程中导热与辐射问题的分析和计算. E-mail: maxiaobo-tj@163.com

* 通讯作者 (Corresponding author): E-mail: maxiaobo-tj@163.com

Received date: 2015-04-21, revised date: 2015-10-19

抗法等为主.从实际情况看,将此类方法用于对复合材料的检测并不理想,存在可检测损伤类型少、检出率低、检测速度慢、检测结果不能存储、定量分析困难等不足.由于复合材料与金属材料在物理性能、力学性能、结构特点和制造工艺等方面的较大差异,所以用现有的金属无损检测方法并不能完全解决复合材料及结构件的损伤检测问题^[3-4].

红外热波无损检测技术是一种快速、非接触、准确、直观的先进无损检测技术,能够很好地弥补传统的金属材料检测方法的不足,非常适宜于功能梯度材料的无损检测^[5].当材料内部含有缺陷时,热波会在缺陷与材料表面之间发生多重散射,对材料的表面温度产生影响.通过红外热波成像系统测量表面温度的变化,可获取材料亚表面缺陷信息达到检测和探伤目的.由于红外热波无损检测通常采用超短激光作为热激励,这时热波在材料中的传播应遵循非傅里叶热传导方程.目前国内外学者通常基于经典傅里叶定律来研究此类问题^[6-8],即在求解材料表面温度时采用抛物型热扩散方程.采用非傅里叶热传导方程的双曲型波动模型能更准确地描述快速加热情况下的热传递过程^[9-11].

目前针对功能梯度材料的热波传播问题的研究主要局限于半无限结构^[12-14],对功能梯度材料,同时还是板条形结构的热波传播与散射问题的研究较少^[15-17],尤其缺乏对功能梯度板条中含缺陷或夹杂的热波散射问题的研究.

基于双曲型热传导方程,研究了含单圆柱夹杂的功能梯度板条中的热波散射问题,分析了几何参数和热物性参数对材料表面温度分布的影响.如功能梯度板条的厚度,材料的非均匀参数等.研究结果可望为功能梯度材料的传热分析、材料内部缺陷评估,以及红外热波反问题提供参考数据.

1 热波控制方程及其求解

研究对象为一个半无限长的功能梯度材料条形体,其热物理特性在 x 方向上呈梯度变化.半径为 α 的圆柱夹杂埋藏在距左表面为 b 的深度上.调制频率为 f 的周期超短脉冲激光沿 x 方向入射到板条左表面,在板条内部形成一个热波过程,如图 1 所示.

基于非傅里叶导热定律,可以得到功能梯度板条内部温度控制方程为

$$\nabla(\lambda \nabla T) = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) \quad (1)$$

式中, T 为功能梯度材料内温度; ∇ 为 Hamilton 算

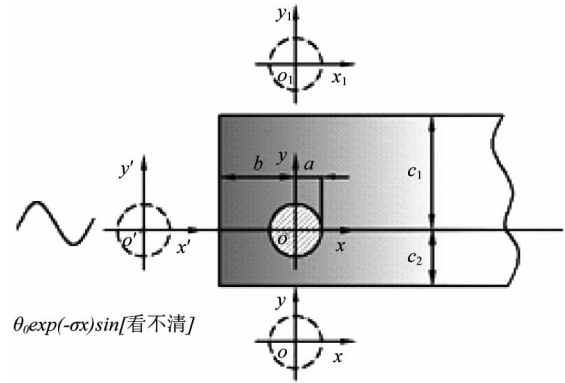


图 1 脉冲加热和物体结构示意图
Fig. 1 Schematic diagram of modulated laser heating

子, $\nabla = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y$; λ, c_p, ρ 分别为梯度材料的导热系数 $W/(m \cdot K)$ 、定压比热 $J/(kg \cdot K)$ 和密度 kg/m^3 ; τ 为热弛豫时间 s 。

设功能梯度材料的密度和热弛豫时间为常数,其导热系数和定压比热为指数分布

$$\lambda = \text{Re}[\lambda_0 \exp(2\sigma x)], c_p = \text{Re}[c_{p0} \exp(2\sigma x)] \quad (2)$$

式中, λ_p, c_{p0} 是复变量,分别表示 $x=0$ 的复导热系数和复定压比热; σ 是材料的导热系数和比热的空间梯度分布参数,用来表示材料的非均匀性,复变量形式为 $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

将式(2)代入到式(1)中,则可得如下温度控制方程

$$\nabla^2 T + 2\sigma \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

式中, $D = \lambda/\rho c_p = \lambda_0/\rho c_{p0}$ 为常量,表示物体的热扩散率 (m^2/s); $c = \sqrt{D/\tau}$, 表示热波的传播速度 (m/s).

研究问题的周期稳态解,设 $T = T_0 + \text{Re}[\vartheta \exp(-i\omega t)]$, 则式(3)可化为如下形式

$$\nabla^2 \vartheta + 2\sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{D} \right) \vartheta = 0 \quad (4)$$

式中, T_0 为外界平均温度; ω 为圆频率, $\omega = 2\pi f$. 于是,方程(4)的解为如下形式

$$\vartheta = \exp(-\sigma x) u(x, y) \quad (5)$$

其中,函数 $u(x, y)$ 满足如下方程

$$\nabla^2 u + \kappa^2 u = 0 \quad (6)$$

式中, $\kappa = (\omega^2/c^2 + i\omega/D - \sigma^2)^{1/2} = \alpha + i\beta$, 是复变量波数; α, β 分别表示热波传播波数和吸收系数,可取 $\alpha > 0, \beta > 0$, 即有

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2} + \left(\frac{\omega}{D} - 2\sigma_1\sigma_2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + 4 \left(\frac{1}{\mu^2} - \sigma_1 \sigma_2 \right)^2} + [k^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)] \right\}} \quad , \quad (7)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + \left(\frac{\omega}{D} - 2\sigma_1 \sigma_2 \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right]^2 + 4 \left(\frac{1}{\mu^2} - \sigma_1 \sigma_2 \right)^2} - [k^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)] \right\}} \quad , \quad (8)$$

其中, $k = \omega/c$, 表示不考虑扩散效应时的热波波数. 当热波传播速度 $c \rightarrow \infty$ 和非均匀参数 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow \sqrt{\omega/2D} = 1/\mu$, $\beta \rightarrow \sqrt{\omega/2D} = 1/\mu$, 热波波数则可简化为 $k = \alpha + i\beta \rightarrow (i+i)/\mu$. 此时, 功能梯度材料中基于非傅里叶导热定律的双曲型热传导方程将退化为均匀材料中基于傅里叶导热定律的抛物型热传导方程.

采用复变函数法, 引入复变量 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 式(6)可写成如下形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + \left(\frac{\kappa}{2} \right)^2 u = 0 \quad , \quad (9)$$

式(9)所决定的含圆柱夹杂功能梯度板条中热波散射场的一般解为

$$\vartheta = \exp(-\sigma x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r) e^{in\theta}$$

$$= \exp[-\sigma \operatorname{Re}(z)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \quad , \quad (10)$$

式中, $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示取实部; A_n 为亚表面圆柱缺陷的热波散射波模式系数, 可由夹杂的热边界条件确定; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为复宗量第一类汉克尔(Hankel)函数.

2 热波入射的激发及总热波波场

热波可由调制超短脉冲激光束在功能梯度板条左表面激发, 在板条中形成沿轴正方向传播的入射波. 根据固体中波动理论, 半无限长功能梯度板条内的热波可描述为

$$\vartheta = f(y) \exp(-\sigma x) \exp(ipx) \quad . \quad (11)$$

此导波解必须满足温度控制方程(4), 因此 $f(y)$ 的表达式为

$$f(y) = A \cos(qy) + B \sin(qy) \quad , \quad (12)$$

式中, p 和 q 分别是温度波动纵向波数和横向波数, $p^2 = \kappa^2 - q^2$.

同时, 板条上下表面的热边界条件为表面温度等于环境温度, 即有

$$f(c_1) \exp(ipx) = 0 \quad , \quad (13a)$$

$$f(-c_2) \exp(ipx) = 0 \quad . \quad (13b)$$

这样, 可得到温度波数横向波数为

$$q = \frac{n\pi}{c_1 + c_2}, (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad . \quad (14)$$

将式(14)代入到式(11)中, 可得到满足板条上下热边界条件的温度分布表达式

$$\vartheta = B \sin[q(c_2 + y)] \exp(-\sigma x) \exp(ipx) \quad . \quad (15)$$

利用镜像方法来研究半无限板条边界的反射波, 研究 $n=1$ 模式的入射波情况.

于是, 上下表面温度为环境温度时, 入射热波可描述为

$$\vartheta^{(i)} = \vartheta_0 \exp(-\sigma x) \sin[q(c_2 + y)] \exp[ip(x + b)] \quad , \quad (16)$$

式中, ϑ_0 为热波入射的温度幅值; p 为入射波方向的波数.

考虑到在 $x = -b, y = c_1$ 和 $y = -c_2 (c_1 > 0, c_2 > 0)$ 等边界在功能梯度板条中产生的热波多重散射后, 在极坐标 (r, θ) 中圆柱夹杂产生的热波散射场可描述为

$$\vartheta^{(s)} = e^{-\sigma r \cos\theta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n H_n^{(1)}(\kappa r') e^{in\theta'} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r_m) e^{in\theta_m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n H_n^{(1)}(\kappa r'_m) e^{in\theta'_m} \right] \right\} \quad , \quad (17)$$

为分析简化计算, 写成复变量形式

$$\vartheta^{(s)} = e^{-\sigma \operatorname{Re}(z)} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_0|) \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^n \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^4 A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^n \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \sum_{l=1}^4 A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_0 - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^n \right] \quad , \quad (18)$$

式中, $z_0 = -2b$; $z_{1m} = i2(mL - c_2)$; $z_{2m} = i2mL$; $z_{3m} = -i2[(m-1)L + c_2]$; $z_{4m} = -i2mL$; $L = c_1 + c_2$; $m = 1, 2, \dots$.

此时, 功能梯度板条中总热波波场应由入射波和散射波叠加而成, 其数学表达式为

$$\vartheta^{(t)} = \vartheta^{(i)} + \vartheta^{(s)} \quad . \quad (19)$$

圆柱夹杂内部的热波驻波波场表达式为

$$\vartheta^{st} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(\kappa_0 r) \exp(in\theta) \exp(-i\omega t) \quad , \quad (20)$$

其中, B_n 为圆柱夹杂的热波驻波模式系数, κ_0 为圆柱夹杂内热波波数

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \alpha_0 + i\beta_0; \\ \alpha_0 &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k_0^4 + \frac{1}{\mu_0^4}} + \frac{1}{2}k_0^2}; \\ \beta_0 &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k_0^4 + \frac{1}{\mu_0^4}} - \frac{1}{2}k_0^2}; \\ k_0 &= k\left(\frac{D_0}{D}\right)^{-1/2}\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

式中, τ, τ_0 分别是功能梯度板条主材和夹杂材料的热弛豫时间; D, D_0 分别是功能梯度板条主材和夹杂材料的热扩散率; $J_n(\cdot)$ 是贝塞尔 (Bessel) 函数.

在主材料和夹杂材料内温度场的可写成如下形式

$$\vartheta_{out} = \vartheta^{(t)} + \vartheta^{(i)} + \vartheta^{(s)} \quad (21a)$$

$$\vartheta_{in} = \vartheta^{(st)} \quad (21b)$$

圆柱夹杂材料和板条主材界面的热边界条件为, 界面满足温度连续和热流密度连续两个边界条件, 其数学表达式为

$$\vartheta_{out}|_{r=a} = \vartheta_{in}|_{r=a} \quad (22a)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta_{out}}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\lambda \frac{\partial \vartheta_{in}}{\partial n} \Big|_{r=a} \quad (22b)$$

式中, n 表示亚表面圆柱缺陷的外法线方向.

3 热波模式系数的确定及温度分布

根据亚表面缺陷的热边界条件确定热波模式系数. 将式(21)代入到式(22)中可得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n X_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n Y_n = W \quad (23a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n X_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n Y_n = J \quad (23b)$$

其中,

$$U_n = e^{-\sigma \text{Re}(z)} \left[\begin{aligned} &H_n^{(1)}(\kappa|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n + H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0|) \left\{ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right\}^{-n} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 H_n^{(1)}(\kappa|z-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right\}^n \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right\}^{-n} \end{aligned} \right],$$

$$V_n = -J_n(\kappa_0|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n, W = -\vartheta_0 e^{-\sigma x} \sin[q(c_2+y)] \exp[ip(x+b)],$$

$$I_n = -\frac{\lambda_0 \kappa_0}{2\lambda} [J_{n-1}(\kappa_0 a) - J_{n+1}(\kappa_0 a)] \left\{ \frac{z}{a} \right\}^n,$$

$$\begin{aligned} H_n &= -\sigma \text{Re}(z) e^{-\sigma \text{Re}(z)} \left[H_n^{(1)}(\kappa|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n + H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0|) \left\{ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right\}^{-n} \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 H_n^{(1)}(\kappa|z-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right\}^n \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right\}^{-n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ e^{-\sigma \text{Re}(z)} \left[\frac{1}{2} \kappa [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z|)] \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \right. \\ &+ \frac{1}{2} \kappa \text{Re} \left[\frac{z}{|z|} \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z-z_0|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z-z_0|)] \left\{ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right\}^{-n} \\ &- i n \text{Im} \left[\frac{z}{|z|} \frac{1}{|z-z_0|} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0|) \left\{ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right\}^{-n} + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 \text{Re} \\ &\left[\frac{z}{|z|} \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z-z_{lm}|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z-z_{lm}|)] \left\{ \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right\}^n \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 i n \text{Im} \left[\frac{z}{|z|} \frac{1}{|z-z_{lm}|} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right\}^n + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 \text{Re} \\ &\left[\frac{z}{|z|} \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right] \kappa [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z-z_0-z_{lm}|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z-z_0-z_{lm}|)] \\ &\left\{ \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right\}^{-n} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 i n \text{Im} \left[\frac{z}{|z|} \frac{1}{|z-z_0-z_{lm}|} \right] \\ &H_n^{(1)}(\kappa|z-z_0-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right\}^{-n} \end{aligned}$$

$$J = -\vartheta_0 \exp[ip(x+b) - \sigma x] [q \sin \theta \cos[q(c_2+y)] + (ip - \sigma) \cos \theta \sin[q(c_2+y)]]$$

式中, Re 和 Im 分别表示对变量取实部和虚部; $z = re^{i\theta}$, $\cos \theta = \text{Re}(z/|z|)$, $\sin \theta = \text{Im}(z/|z|)$, $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$, $X_n = A_n$, $Y_n = B_n$.

用 $e^{-is\theta}$ 乘以式(23)的两端, 并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分, 可得如下无穷代数方程组

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_{ns} X_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} V_{ns} Y_n = W_s \quad (n = s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24a)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{ns} X_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_{ns} Y_n = J_s \quad (n = s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24b)$$

式中,

$$U_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n e^{-is\theta} d\theta, V_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$H_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_n e^{-is\theta} d\theta, I_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_n e^{-is\theta} d\theta,$$

$$W_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_n e^{-is\theta} d\theta, J_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J e^{-is\theta} d\theta.$$

其中, $U_{ns}, V_{ns}, H_{ns}, I_{ns}$ 是 $s \times n$ 阶矩阵, W_s, J_s 是 $s \times 1$ 阶常数矩阵, X_n, Y_n 是 $s \times 1$ 阶矩阵, 即:

$$\begin{Bmatrix} U_{ns} & V_{ns} \\ H_{ns} & I_{ns} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_s \\ J_s \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式(25)即是确定热波散射模式系数 A_n, B_n 的矩阵方程.

这样, 功能梯度板条左表面温度分布的表达式为

$$\begin{aligned} \vartheta &= e^{-\sigma \text{Re}(z)} \left[\vartheta \sin[q(c_2+y)] e^{i[p(x+b)]} \right. \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_0|) \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^{-n} \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^n \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 A_n H_n^{(1)}(\kappa |z - z_0 - z_{lm}|) \\
 & \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^{-n} \quad . \quad (26)
 \end{aligned}$$

取夹杂的半径 a 为特征长度. 数值计算时采用的无量纲量有: 无扩散行波波数 $ka = 0.01 \sim 2.0$; 相对热扩散长度 $\mu/a = 0.50 \sim 3.0$; 夹杂埋藏深度 $b/a = 1.10 \sim 3.0$; 非均匀参数的实部和虚部分别是 $(\sigma_1 a) = -0.5 \sim 0.5, (\sigma_2 a) = 0$; 圆柱缺陷与上下表面的距离分别为 $c_1/a = 5.0 \sim 20.0, c_2/a = 5.0 \sim 20.0$; 温度比 ϑ/ϑ_0 . 此时的无量纲复波数是 $\kappa a = \alpha a + i\beta a$. 其中,

$$\begin{aligned}
 \alpha a &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]^2 + \left[\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 - (\sigma_1 a)(\sigma_2 a)\right]^2} + \frac{1}{2}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]}, \\
 \beta a &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]^2 + \left[\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 - (\sigma_1 a)(\sigma_2 a)\right]^2} - \frac{1}{2}[(ka)^2 - (\sigma_1 a)^2 + (\sigma_2 a)^2]}, \\
 \alpha_0 a &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(ka)^4 + \left(\frac{a}{\mu_0}\right)^4} + \frac{1}{2}(ka)^2}, \beta_0 a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(ka)^4 + \left(\frac{a}{\mu_0}\right)^4} - \frac{1}{2}(ka)^2}.
 \end{aligned}$$

4 数值算例

图 2 给出了含圆柱夹杂功能梯度板条左表面的温度分布, 各参数取值分别为: $\sigma_1 a = 0.5, \sigma_2 a = 0, D/D_0 = 20, \lambda/\lambda_0 = 20, \tau_0/\tau = 2500, \mu/a = 1.0925, b/a = 1.12$, 当板条宽度足够大时, 可以近似地视为半无限体, 这里取 $c_1 = c_2 = 10$, 此时的数值结果与文献[12]基本一致.

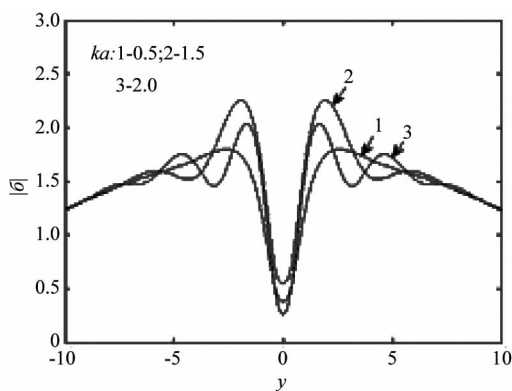


图 2 功能梯度板条表面的温度分布
Fig. 2 The surface temperature of the functionally graded slabs

图 3 到图 5 给出了功能梯度材料板条左表面温度分布, 各参数取值为: $\sigma_1 a = 0.5, \sigma_2 a = 0, D/D_0 = 20, \lambda/\lambda_0 = 20, \tau_0/\tau = 2500, \mu/a = 1.0925, b/a =$

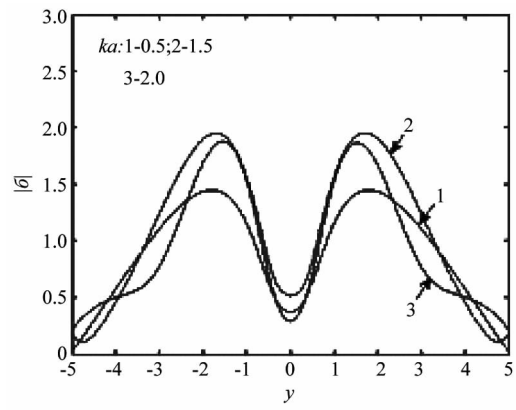


图 3 功能梯度板条表面的温度分布
Fig. 3 The surface temperature of the functionally graded slabs

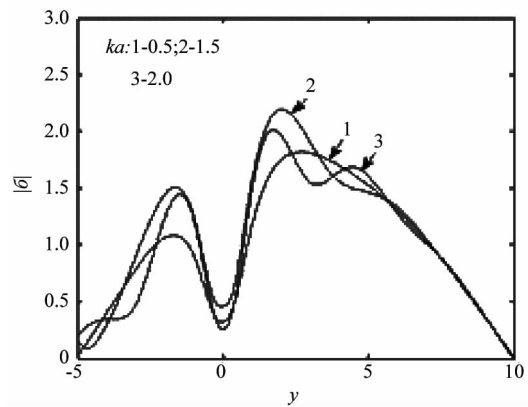


图 4 功能梯度板条表面的温度分布
Fig. 4 The surface temperature of the functionally graded slabs

1.12, 其中图 3 到图 5 中缺陷的位置参数分别取为: $c_1 = 5, c_2 = 5; c_1 = 10, c_2 = 5; c_1 = 15, c_2 = 5$. 从图中可以看出, 圆柱夹杂对其左前方的表面温度影响较大, 远离夹杂的表面温度受其影响较小. 当圆柱夹杂偏离板条中心时, 温度分布变化区域也随之发生偏移.

图 6 给出了 $y = 0$ 处的表面温度随波数变化的曲线, 各参数取值为: $\sigma_2 a = 0, D/D_0 = 20, \lambda/\lambda_0 = 20, \tau_0/\tau = 2500, \mu/a = 1.0925, b/a = 1.12$ 从图 6 可以看出, $y = 0$ 处的表面温度随着波数的增加是呈波动性变化的, 且随着非均匀参数从负变化到正, 这种波动性变得越来越显著.

图 7 给出了 $y = 0$ 处的表面温度随热弛豫时间比变化的曲线, 各参数取值为: $\sigma_2 a = 0, D/D_0 = 20, \lambda/\lambda_0 = 20, \mu/a = 1.0925, b/a = 1.12, ka = 0.5, c_1 = 5, c_2 = 5$, 从图 7 可以看出, $y = 0$ 处的表面温度随着

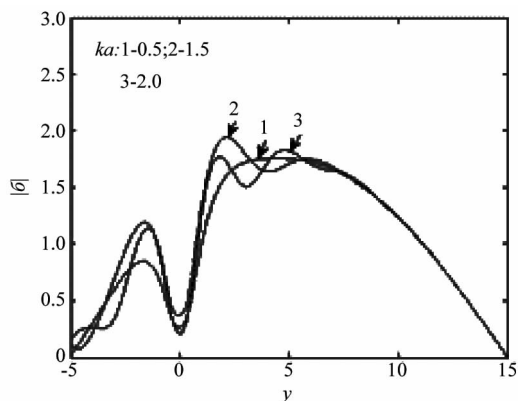


图5 功能梯度板条表面的温度分布
Fig.5 The surface temperature of the functionally graded slabs

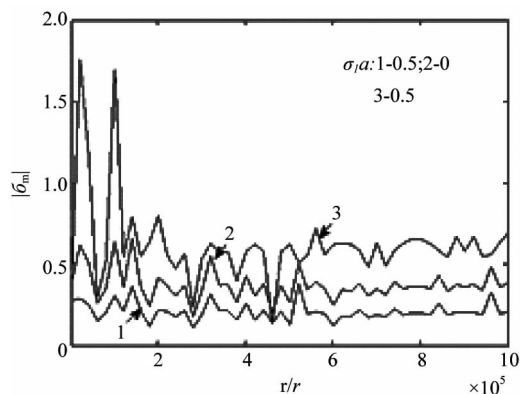


图7 热弛豫时间比对 $y=0$ 处表面温度的影响
Fig.7 Effect of the ratios of thermal relaxation time on the surface temperature at $y=0$

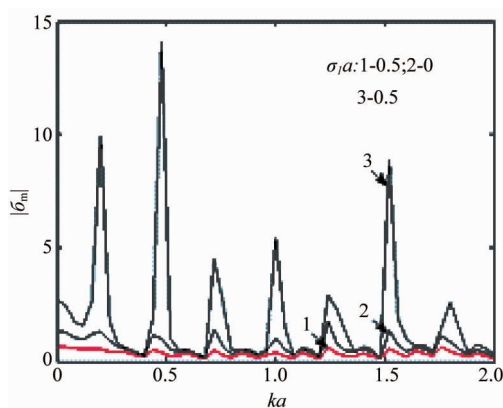


图6 波数对 $y=0$ 处表面温度的影响
Fig.6 Effect of wavenumber on the surface temperature at $y=0$

表面温度缓慢减小然后趋于平稳,当非均匀参数为零或正值时,表面温度逐渐增加然后趋于平稳.

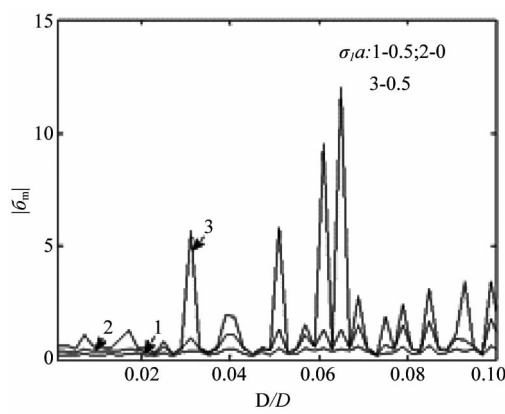


图8 热扩散系数比对 $y=0$ 处表面温度的影响
Fig.8 Effect of the ratios of thermal diffusion coefficient on the surface temperature at $y=0$

热弛豫时间比的增加是呈波动性变化的,且随着非均匀参数从负变化到正,这种波动性变得越来越显著.

图8给出了 $y=0$ 处的表面温度随热扩散率比变化的曲线,各参数取值为: $\sigma_2 a = 0, \tau_0/\tau = 2\ 500, \lambda/\lambda_0 = 20, \mu/a = 1.092\ 5, b/a = 1.12, ka = 0.5, c_1 = 5, c_2 = 5$,从图8可以看出, $y=0$ 处的表面温度随着热扩散率比的增加是呈波动性变化的,且随着非均匀参数从负变化到正,这种波动性变得越来越显著.

图9给出了 $y=0$ 处的表面温度随导热系数比变化的曲线,各参数取值为: $\sigma_2 a = 0, \tau_0/\tau = 2\ 500, D/D_0 = 20, \mu/a = 1.092\ 5, b/a = 1.12, ka = 0.5, c_1 = 5, c_2 = 5$,从图9可以看出,当导热系数比很小的时候, $y=0$ 处的表面温度随着导热系数比的增加而减小;当导热系数比较大时, $y=0$ 处的表面温度的变化规律与非均匀参数有关,当非均匀参数是负值时,

图10到图12给出了 $y=0$ 处的表面温度随埋藏深度的变化曲线,各参数取值为: $\sigma_1 a = -0.5$ (图11中 $\sigma_1 a = 0.5$), $\sigma_2 a = 0, \tau_0/\tau = 2\ 500, \lambda/\lambda_0 = 20, D/D_0 = 20, ka = 0.5, c_1 = 0.5$ (图12中 $c_1 = 10$), $c_2 = 5$ (图12中 $c_2 = 10$). 从图中可以看出,当埋藏深度较小时,圆柱夹杂对功能梯度板条的表面温度分布影响较大,随着埋藏深度的增加,圆柱夹杂对表面温度的影响变小;且随着相对热扩散长度的增加,圆柱夹杂对功能梯度板条表面温度的影响也会变大. 对比图10和图11可得,非均匀参数对 $y=0$ 处的表面温度影响较大,当非均匀参数是负值时, $y=0$ 处的表面温度随埋藏深度变化的幅度较小,最后趋于较小的温度值;当非均匀参数为正值时, $y=0$ 处的表面温度随埋藏深度变化的幅度较大,最后趋于较大

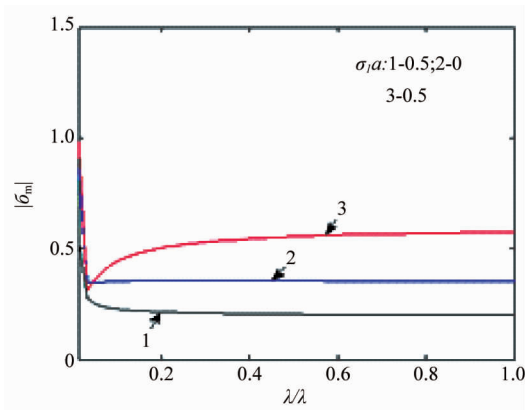


图 9 导热系数比对 $y=0$ 处表面温度的影响
 Fig.9 Effect of the ratios of heat conductivity on the surface temperature at $y=0$

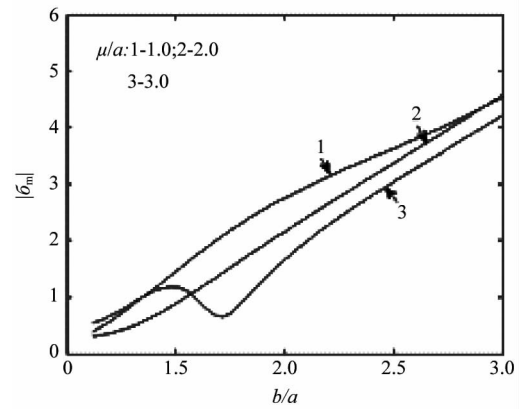


图 11 埋藏深度对 $y=0$ 处表面温度的影响
 Fig.11 Effect of the buried depth on the surface temperature at $y=0$

的温度值. 对比图 10 和图 12 可得, 功能梯度板条的厚度也会对板条表面温度分布的产生影响, 当板条宽度增大, $y=0$ 处的表面温度随埋藏深度的变化幅度变小.

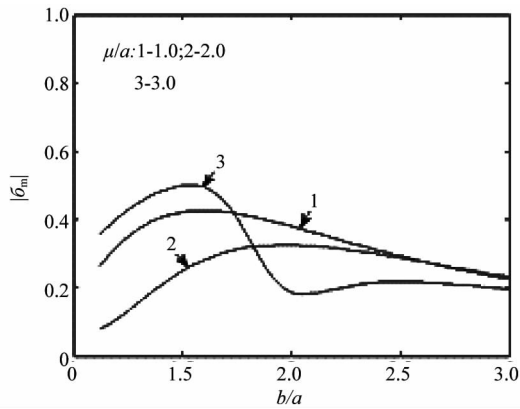


图 10 埋藏深度对 $y=0$ 处表面温度的影响
 Fig.10 Effect of the buried depth on the surface temperature at $y=0$

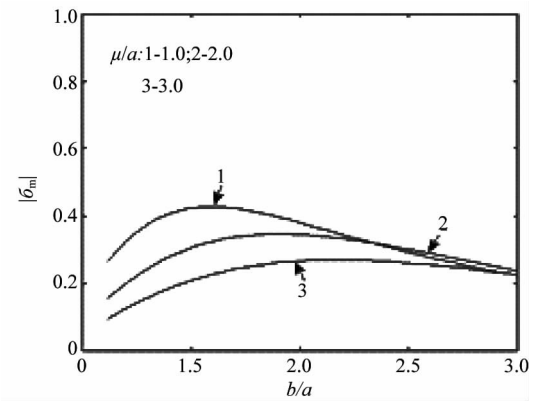


图 12 埋藏深度对 $y=0$ 处表面温度的影响
 Fig.12 Effect of the buried depth on the surface temperature at $y=0$

5 结论

采用复变函数法, 研究了含圆柱夹杂的功能梯度板条中热波散射问题, 给出了基于双曲型热传导方程的材料表面温度分布的解析解, 通过分析计算可以得到以下结论:

(1) 功能梯度板条中的圆柱夹杂对其正对区域的左表面温度分布影响较大, 当圆柱夹杂偏离板条中心时, 温度分布变化区域也随之发生偏移.

(2) $y=0$ 处的表面温度随着热波入射波数、材料热弛豫时间比和热扩散率比的增加是呈波动性变化的, 且随着非均匀参数从负变化到正, 这种波动性

变得越来越显著.

(3) 当材料导热系数比很小的时候, $y=0$ 处的表面温度随着导热系数比的增加而减小; 当材料导热系数比较大时, $y=0$ 处的表面温度的变化规律与非均匀参数有关.

(4) 当埋藏深度较小时, 圆柱夹杂对功能梯度板条的表面温度分布影响较大, 随着埋藏深度的增加, 圆柱夹杂对表面温度的影响减小; $y=0$ 处的表面温度随埋藏深度变化的幅度会因相对热扩散长度、板条宽度、非均匀参数的变化而发生变化.

通过测量板条材料表面温度的幅值和相位可以检测夹杂物的特征信息, 如夹杂尺寸, 埋藏深度等. 正问题是研究热物理反问题的基础, 本文的分析方法可以用来求解热物理正问题, 计算结果可以为红外热波无损检测中的反问题研究提供参考数据. 要实现利用热波技术对材料亚表面夹杂进行评估和定

征,还须具备对工程材料与专业背景的先验知识,以及热物理反问题分析计算的正则化方法或最优非线性估计方法等。

References

- [1] Birman V, Keil T, Hosder S. Functionally graded materials in engineering[M]. [S.l.]: Springer New York, 2013, 19-41.
- [2] Reynolds N J. Functionally graded materials[M]. [S.l.]: Nova Science Publishers, 2012.
- [3] GHALI V S, MULAVEESALA R. Frequency modulated thermal wave imaging techniques for non-destructive testing [J]. *Insight*, 2010, **52**(9): 475-480.
- [4] BOUTEILLE P, LEGROS G, WALASZEK H, et al. Non-destructive testing of metallic materials using passive and active infrared thermography[J]. *Mech & Ind*, 2014, **15**(9): 313-321.
- [5] FANG Xue-Qian, LIU Jin-Xi, HU Chao. Nondestructive evaluation of a conducting sphere in semi-infinite functionally graded materials using thermal wave method[J]. *NDT and E International*, 2010, **43**(2): 163-170.
- [6] Terron J M, Sanchez-Lavega A, Salazar A. Multiple scattering of thermal waves by a coated subsurface cylindrical inclusion[J]. *Journal of Applied Physics*, 2001, **104**(10): 5696-5702.
- [7] Salazar A, Sanchez-Lavega A, Celorrio R. Scattering of cylindrical thermal waves in fiber composites; In-plane thermal diffusivity[J]. *Journal of Applied Physics*, 2003, **104**(8): 4536-4542.
- [8] Thibaud J B, Carminati R, Greffet J J. Scattering of a diffusive wave by a subsurface object [J]. *Journal of Applied Physics*, 2000, **104**(11): 7638-7646.
- [9] Zhao WT, Wu JH. Solution and analysis of non-Fourier heat conduction in a plane slab under arbitrary periodic surface thermal disturbance[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(18): 962.
- [10] Saedodin S, Torabi M, Eskandar H, et al. Analytical and numerical solution of non-fourier heat conduction in cylindrical coordinates [J]. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2011, **13**(3): 411-424.
- [11] Fang XQ, Duan SM, Liu SH, et al. Multiple scattering of thermal waves from a subsurface cylindrical inclusion in semi-infinite functionally graded materials using non-fourier model [J]. *International Journal of Thermophysics*, 2009, **30**(3): 1055-1073.
- [12] MA Xiao-Bo, WANG Fei, CHEN De-Zhen. Influence of inclusion in functionally graded materials on the surface temperature distributions[J]. *Acta Physica Sinica* (马晓波, 王飞, 陈德珍. 亚表面异质缺陷对功能梯度材料表面温度场的影响. *物理学报*), 2014, **63**(19): 197-205.
- [13] WANG F, MA XB, CHEN DZ. Thermal wave scattering in functionally graded materials containing a spherical inclusion[J]. *Thermochimica Acta*, 2015, **600**: 116-123.
- [14] MA Xiao-Bo, WANG Fei, CHEN De-Zhen. Temperature distributions at the surface of functionally graded materials containing a cylindrical defect [J]. *Journal of Applied Physics*, 2014, **115**(20): 203505-203505-8.
- [15] SUN Dan, LUO Song-Nan. Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments[J]. *Ultrasonics*, 2011, **51**(8): 940-952.
- [16] MA Xiao-Bo, TAN He-Ping. Thermal wave scattering from subsurface cylinders in the semi-infinite slab[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology* (马晓波, 谈和平. 含缺陷半无限条形体中热波多重散射与温度分布. *哈尔滨工业大学学报*), 2007, **39**(9): 1454-1458.
- [17] MA Xiao-Bo, TAN He-Ping, HU Chao. Scattering of thermal waves by subsurface defects of arbitrary shape buried in a semi-infinite slab[J]. *J. Infrared Millim. Waves* (马晓波, 谈和平, 胡超. 半无限板条中任意形亚表面缺陷的热波散射. *红外与毫米波学报*), 2011, **30**(3): 243-275.