

## 自适应 Split Bregman 迭代的红外图像 降噪算法

王宇, 汤心溢\*, 罗易雪, 王世勇  
(中国科学院上海技术物理研究所, 上海 200083)

**摘要:** 对于全变分降噪模型, Split Bregman 算法收敛快而且具有较好的降噪效果. 通过研究 Split Bregman 算法, 提出了一种自动调节拉格朗日乘子和罚参数的自适应 Split Bregman 算法. 实验结果表明, 新方法与传统 Split Bregman 算法相比具有更快的收敛速度, 同时能在保持红外图像边缘特性的前提下有效地去除噪声.

**关键词:** 红外图像降噪; 全变分模型; 迭代

**中图分类号:** TP751.1 **文献标识码:** A

## IR image denoising algorithm based on adaptive split bregman method

WANG Yu, TANG Xin-Yi\*, LUO Yi-Xue, WANG Shi-Yong  
(Shanghai Institute of Technical Physics of the Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China)

**Abstract:** Split Bregman method, which can converge quickly and denoise very well, is considered to be an extremely efficient method for total variation denoising model. By studying Split Bregman method, an adaptive Split Bregman method which can adjust Lagrange multiplier and penalty parameter automatically was proposed. Experimental results show that the new method can not only converge faster than the traditional Split Bregman method, but also preserve the edge information while removing noises.

**Key words:** Infrared image denoising, total variation model, iteration

**PACS:** 07.05.Pj

### 引言

在红外图像采集或传输的过程中, 由于受到各种因素的干扰, 图像容易被噪声污染, 因此降噪是红外图像处理流程中至关重要的一个环节. 传统的红外图像降噪方法, 如均值滤波、高斯滤波等, 虽然能通过对整幅图像平滑来去除一些噪声, 但往往也会使图像的边缘信息变得模糊, 因而存在一定的局限性. 而基于 L2 范数的最小二乘估计也会有同样的问题<sup>[1]</sup>.

图像降噪最理想的情况是在有效去除噪声的同时, 最大限度的保持图像的细节. 1992 年, Rudin,

Osher 和 Fatami 提出的基于全变分 (Total Variation, TV) 模型 (ROF 模型) 的降噪算法<sup>[2]</sup>, 由于其对噪声平滑和细节保留的折衷处理, 而受到广大学者的关注. 该算法用 TV 范数替代 L2 范数, 通过拉格朗日乘子法和人工时间推演<sup>[3]</sup>的方法, 将图像降噪问题看成是使能量泛函最小化的优化问题, 它能在去除噪声的同时保留图像的边缘信息. 但是该方法收敛慢, 需要很长时间的推演才能得到最优解, 而且存在阶梯效应, 需要噪声方差等先验知识<sup>[4]</sup>. 为加快算法的收敛速度, Yin 和 Osher 等人最早将 Bregman 迭代算法用于压缩感知图像重构<sup>[5]</sup>, 它将等式约束优化问题转化成无约束优化问题, 通过 Fixed Point 方

收稿日期: 2013-05-13, 修回日期: 2013-06-07

Received date: 2013-05-13, revised date: 2013-06-07

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (2011AA7031002G); 国家十二五国防预研项目 (41101050501).

**Foundation items:** Supported by National High Technology Research and Development Program (863 Program) of China (2011AA7031002G); National Defense Pre-research Foundation of China (41101050501).

**作者简介 (Biography):** 王宇 (1988-), 男, 湖北宜都人, 博士, 主要研究领域为红外成像系统、红外图像处理, E-mail: wangyucba@hotmail.com

\* 通讯作者 (Corresponding author): E-mail: gq227@mail.sitp.ac.cn

法<sup>[6,7]</sup>求解一系列优化子问题,然后进行 Bregman 迭代,从而得到重构的图像.随后 Goldstein 和 Osher 提出了 Split Bregman 算法<sup>[8]</sup>,利用算子分离理论,将 TV 泛函优化问题转换到带等式约束的 L1 泛函优化问题,然后利用拉格朗日乘子法和罚函数法将约束优化转换成无约束优化问题,再利用 Bregman 迭代求解.该算法易于实现,而且收敛速度比传统 Bregman 迭代算法更快,被广泛的用于图像降噪、复原、修补和重构,以及压缩感知领域.

本文在研究 Split Bregman 算法的基础上,通过自动调节每一次 Bregman 迭代的拉格朗日乘子和罚参数,提出了一种自适应 Split Bregman 算法,具体内容安排如下:首先简要的介绍经典的 ROF 降噪模型和传统的 Split Bregman 算法原理和流程,然后提出自适应 Split Bregman 算法,阐述了拉格朗日乘子和罚参数的更新策略,并给出算法流程,最后通过与成熟算法比较,验证了新算法的有效性,并将其应用于实际红外图像降噪,取得了明显效果.

## 1 Split Bregman 算法

### 1.1 降噪模型

图像复原是一个逆问题,目的是要从退化的图像中复原出尽量接近真实的图像.考虑最一般的图像退化模型:

$$f = Ku + n \quad (1)$$

$f$  是已知的退化图像,  $u$  是未知的原始图像,假定  $K$  是一个线性的模糊算子,比如高斯模糊核等,  $n$  是均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声. 如果  $K = I$ , 退化图像  $f$  就没有模糊, 对应的式(1)就变成单纯的降噪问题, 图像退化模型简化成降噪模型:

$$f = u + n \quad (2)$$

这样,降噪问题就可以等价求一个关于  $u$  的能量泛函  $J(u)$  的带等式约束最优化问题<sup>[9]</sup>, 可以用如下表达式描述:

$$\min_u J(u) \text{ s. t. } \|u - f\|_2^2 = \sigma^2, \|u\|_2 = \|f\|_2 \quad (3)$$

采用拉格朗日乘子法,式(3)变成

$$\min_u \{J(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2\} \quad (4)$$

符号  $\|\cdot\|_2$  表示 L2 范数,  $\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$ .

第一项为正则项,其作用是平滑图像,起到降噪的效果,第二项为保真项,其作用是控制与原图像的差异,降低图像失真度,起到保留图像边缘特性的效果,  $\lambda$  为拉格朗日乘子,平衡降噪与保真,主要依赖

于噪声水平.

从含噪信号中估计真实信号,最常用的方法就是基于最小二乘法的算法簇,因为从统计学上来讲,最小二乘估计是均方估计,属于 L2 范数范畴,它包含了估计的均值与方差,在所有可能的估计信号中,最小二乘估计的全局效果是最好的<sup>[2]</sup>. 但是 Rudin 推测对于图像而言可能基于 TV 范数的估计要比 L2 范数更合适<sup>[2]</sup>, 基于此, Rudin, Osher 和 Fatami 提出了经典的 ROF 降噪模型:

$$\min_u \{TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2\} \quad (5)$$

对于定义在  $\Omega \in R^2$  上的二维图像  $u$ , 其 TV 范数定义为

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx dy, \nabla u = (\nabla_x u, \nabla_y u) \quad (6)$$

可以看出 TV 范数本质上属于 L1 范数,文献[10]证明了 TV 降噪模型的最小化解是存在且唯一的.

### 1.2 算法原理

对于最优化式(5),文献[5]利用 Bregman 迭代求解,并证明了其收敛性,迭代过程可由下式描述:

$$u^{k+1} \leftarrow \min_u \{TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f^{k+1}\|_2^2\} \quad (7)$$

$$\text{where } f^{k+1} = f + (f^k - u^k)$$

式中,  $f$  是输入的带噪图像,  $u$  为待恢复的真实图像,  $k$  表示迭代次数,  $\lambda$  称为拉格朗日乘子,迭代的初始化条件为  $f^0 = u^0 = 0$ . 假设  $f = \bar{u} + n$ ,  $\bar{u}$  表示真实的图像,  $n$  表示噪声,经过一次迭代之后,  $f = u^1 + v^1$ ,  $u^1$  可以看作是  $u$  的一部分,它是完全干净的图像,而  $v^1$  则包含了余下的“好”的图像( $\bar{u} - u^1$ )和噪声  $n$ ,看上去下一次迭代应当从  $v^1$  中再恢复出一部分  $\bar{u}$ ,但是 Bregman 迭代实际上是将  $f^2 = f + v^1$  作为下一次迭代的含噪图像输入,这样得到的  $u^2$  不仅继承了全部的  $u^1$ ,而且还从  $v^1$  中恢复出了一部分“好”的图像,所以当迭代收敛的时候,  $u^k$  可以认为是逼近真实图像  $u$  的最优解.

如果考虑各向异性 (Anisotropic) 的 TV 泛函,式(5)可以写成

$$\min_u |\nabla_x u| + |\nabla_y u| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (8)$$

如果令  $d_x = \nabla_x u$ ,  $d_y = \nabla_y u$ , 则上式又可以写成

$$\min_u |d_x| + |d_y| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (9)$$

$$\text{s. t. } d_x = \nabla_x u, d_y = \nabla_y u$$

这样原问题就变成了一个带等式约束的优化问题,应用罚函数法,加上二次罚项,将式(9)转化成无约

束优化问题

$$\min_u \|d_x\| + \|d_y\| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x - \nabla_x u\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y - \nabla_y u\|_2^2, \quad (10)$$

$\mu$  为罚参数. 对上式运用 Bregman 迭代, 就可以得到 Split Bregman 算法:

$$\min_{u, d_x, d_y} \|d_x\| + \|d_y\| + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x - \nabla_x u - b_x^k\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y - \nabla_y u - b_y^k\|_2^2, \quad (11)$$

$b_x^k, b_y^k$  是由迭代产生的. 分两步交替迭代使  $u$  和  $d_x, d_y$  最小化:

$$\text{Step1: } u^{k+1} = \min_u \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x^k - \nabla_x u - b_x^k\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y^k - \nabla_y u - b_y^k\|_2^2$$

$$\text{Step2: } d_x^{k+1} = \min_{d_x} \|d_x\| + \frac{\mu}{2} \|d_x^k - \nabla_x u^{k+1} - b_x^k\|_2^2$$

$$d_y^{k+1} = \min_{d_y} \|d_y\| + \frac{\mu}{2} \|d_y^k - \nabla_y u^{k+1} - b_y^k\|_2^2$$

而对于各向同性 (Isotropic) 的情况, 式 (5) 可以写成

$$\min_u \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_x u)_{i,j}^2 + (\nabla_y u)_{i,j}^2} + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2, \quad (12)$$

同样令  $d_x \approx \nabla_x u, d_y \approx \nabla_y u$ , 最终该问题可转化成无约束优化问题

$$\min_{u, d_x, d_y} \|(d_x, d_y)\|_2 + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_x - \nabla_x u - b_x^k\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|d_y - \nabla_y u - b_y^k\|_2^2, \quad (13)$$

$$\text{where } \|(d_x, d_y)\|_2 = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_x u)_{i,j}^2 + (\nabla_y u)_{i,j}^2}$$

仍然能够分解成两个子问题分别求解<sup>[8]</sup>.

由此可见, Split Bregman 算法就是将原 L1 范数优化问题, 通过算子分离转化成带约束条件的优化问题, 然后将约束条件转化为某种罚函数加到目标函数中去, 从而又将带约束的优化问题转化为一系列的无约束优化子问题来求解.

### 1.3 数值实现

上述 Step1 的最优解条件<sup>[8]</sup>为:

$$(\lambda I - \mu \nabla) u^{k+1} = \lambda f + \mu \nabla_x^T (d_x^k - b_x^k) + \mu \nabla_y^T (d_y^k - b_y^k), \quad (14)$$

$I$  为单位矩阵,  $\nabla$  为拉普拉斯算子, 上式离散化后可

以通过 Gauss-Seidel 迭代求解  $u_{i,j}^k = G_{i,j}^k$ ,

$$G_{i,j}^k = \frac{\mu}{\lambda + 4\mu} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k + (d_{x,i-1,j}^k - b_{x,i-1,j}^k) - (d_{x,i,j}^k - b_{x,i,j}^k) + (d_{y,i-1,j}^k - b_{y,i-1,j}^k) - (d_{y,i,j}^k - b_{y,i,j}^k)) + \frac{\lambda}{\lambda + 4\mu} f_{i,j}, \quad (15)$$

而 Step2 可以通过 Shrinkage 算子求解,

$$d_j^{k+1} = \text{shrink}(\nabla_j u^{k+1} + b_j^k, 1/\mu) \quad j \in x, y$$

where  $\text{shrink}(x, \gamma) = \text{sgn}(x) \cdot \max\{|x| - \gamma, 0\}$

$$= \begin{cases} x - \gamma, & x \in (\gamma, +\infty) \\ 0, & x \in [-\gamma, \gamma] \\ x + \gamma, & x \in (-\infty, -\gamma) \end{cases}, \quad (16)$$

则各向异性 Split Bregman 图像降噪算法流程图为

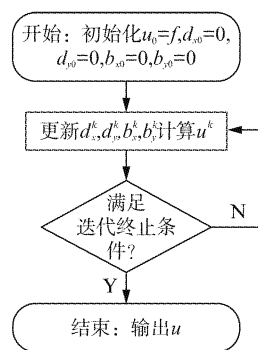


图1 Split Bregman 图像降噪算法流程图

Fig. 1 Flow Chart of Split Bregman Denoising

## 2 自适应 Split Bregman 算法

### 2.1 算法原理

通过分析 Split Bregman 算法, 我们发现算法中拉格朗日乘子  $\lambda$  和罚参数  $\mu$  都是全局值, 需要在初始化时就确定. 但是往往这两个参数的选取又比较困难, 对于  $\lambda$ , 它是与噪声水平相匹配的, 而实际应用中关于噪声的先验知识一般都是未知的, 如果  $\lambda$  选取得过大则起不到降噪的效果, 过小又会使图像严重失真, 丢失图像边缘信息. 而对于罚参数  $\mu$ , 选取得过小, 可能起不到“惩罚”的作用, 导致算法收敛的很慢, 选取得过大又会使算法过快的达到收敛阈值, 不能最大限度的降低噪声. 因此, 本文采用自动更新拉格朗日乘子  $\lambda$  和罚参数  $\mu$  的策略, 使得算法对初值不敏感, 能够更有效地实现图像的降噪处理.

考虑一般的等式约束优化问题

$$\min f(u) \text{ s. t. } h(u) = 0 \quad , \quad (17)$$

其拉格朗日函数为  $L(u, \lambda) = f(u) - \lambda h(u)$ , 假设  $(u^*, \lambda^*)$  是式(17)的极值点, 根据最优性条件, 有

$$\begin{cases} \nabla_u L(u^*, \lambda^*) = \nabla_u f(u^*) - \lambda^* \nabla_u h(u^*) = 0 \\ \nabla_\lambda L(u^*, \lambda^*) = h(u^*) = 0 \end{cases} \quad , \quad (18)$$

再将二次罚函数加入到目标函数中, 则目标函数变为

$$\begin{aligned} \varphi(u, \lambda, \mu) &= L(u, \lambda) + \frac{\mu}{2} \|h(u)\|^2 \\ &= f(u) - \lambda h(u) + \frac{\mu}{2} \|h(u)\|^2 \end{aligned} \quad , \quad (19)$$

式(19)在第  $k$  次迭代取极值  $u^k$  的必要条件为

$$\begin{aligned} \nabla_u \varphi(u^k, \lambda^k, \mu) &= \nabla_u f(u^k) - \nabla_u h(u^k) \\ &(\lambda^k - \mu h(u^k)) = 0 \end{aligned} \quad , \quad (20)$$

本文目的是希望  $\lim_{i \rightarrow k} u^i = u^*$ ,  $\lim_{i \rightarrow k} \lambda^i = \lambda^*$ , 比较式(20)

与式(18), 可以归纳出  $\lambda^k$  的迭代公式为

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu h(u^k) \quad , \quad (21)$$

同时对于罚参数  $\mu$ , 我们可以这样理解, 如果迭代值  $u^k$  满足约束条件  $h(u^k) = 0$ , 那么对于目标函数(3.3)就等于  $L(u, \lambda)$ , 没有受到惩罚, 而如果不满足约束条件, 则会受到罚参数为  $\mu$  的惩罚. 因此罚参数  $\mu$  的更新策略应当是, 当  $\|h(u^k)\|$  越大, 受到的惩罚就应当越大, 这样才有利于算法收敛. 即:

$$\begin{aligned} \text{if } \|h(u^{k+1})\| > \eta \cdot \|h(u^k)\|, \mu^{k+1} &= \alpha \mu^k \\ \text{else } \mu^{k+1} &= \mu^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k - \mu^{k+1} \cdot \text{mean}(h(u^{k+1})) \end{aligned} \quad , \quad (22)$$

结合上一节中 Split Bregman 迭代原理, 这里的  $\|h(u^k)\| = \|\nabla_x u^k - d_x^k\|$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\alpha > 1$ . 罚参数  $\mu$  的更新条件是以  $x$  方向  $\|\nabla_x u - d_x\|_2$  为依据的, 也可以以  $y$  方向或者其他条件为依据. 在更新拉格朗日乘子  $\lambda$  时, 为简便起见, 直接采用  $\|\nabla_x u - d_x\|_2$  的均值, 实验表明取均值要比最值或者均方根值更合适, 硬件上也更容易实现. 下面给出各向异性的自适应 Split Bregman 降噪算法流程图如下:

### 3 实验结果与分析

为了验证新算法的有效性, 对标准测试图像和实际红外图像进行降噪实验, 实验环境为 MATLAB R2010b, PC 机配置为内存 6 G, CPU 为 Inter i7 - 3612QM@ 2.10 GHz. 选取信噪比 SNR、模糊系数  $K^{[12]}$ 、迭代次数、算法耗时等几个定量指标, 与文献[2]和文献[8]的降噪方法进行比较. 其中模糊系数  $K$  是衡量图像清晰度的一个指标. 图像清晰度的下

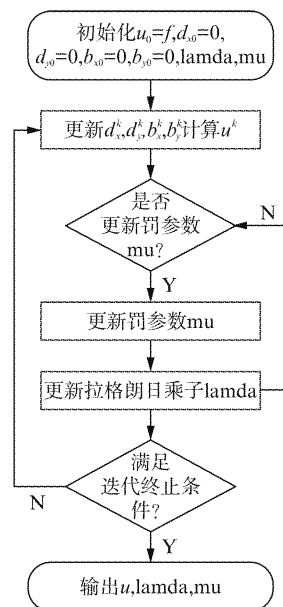


图2 自适应 Split Bregman 算法流程图  
Fig. 2 Flow Chart of Adaptive Split Bregman Denoising

降主要是因为图像中高频成分的损失, 一般表现为边缘模糊和细节丢失<sup>[12]</sup>. 定义降噪前后图像高频成分的比值为模糊系数, 即:

$$K = \frac{\sum_{\Omega} S_{out}(i, j)}{\sum_{\Omega} S_{in}(i, j)} \quad , \quad (23)$$

$S_{in}$  和  $S_{out}$  分别表示原始图像和降噪后图像的高频分量. 一般  $K$  的取值在 0 到 1 之间, 越大说明降噪后图像与原图像的清晰程度越相近.

在标准测试图像中叠加标准差为 15 的高斯白噪声, 运用文献[2]、文献[8]和本文方法对其进行降噪处理. 文献[8]指出, 当  $\mu = 2\lambda$  时, Split Bregman 算法有比较好的收敛效果, 这里选择拉格朗日乘子初值为  $\lambda = 0.15$ , 罚参数初值为  $\mu = 0.3$ . 在文献[8]算法中, 这两个参数是固定的, 而对于本文算法, 这两个参数是每一次 Bregman 迭代都会自动调整, 对于文献[2], 时间步长设为 0.1. 三种方法收敛阈值为  $1e-4$ , 且最多迭代 30 次. 实验结果如图 3 所示:



(a) 含噪图像

(b) 文献[2]方法



图3 不同降噪方法比较  
Fig.3 Comparison of Different denoising methods

从图中可以看出,图(c)和图(d)的降噪效果要明显好于图(b),图(b)能够有效地平滑掉噪声,但是降噪后的图像呈块状,存在阶梯效应,而后两幅图像在保留小尺度的细节上(帽子的褶皱,装饰等)要有更好的效果.以上是视觉主观感受,表1列出一些定量指标,信噪比、相对误差与迭代次数的关系如图4所示.

表1 定量指标

Table 1 Quantitative Index

	含噪图	文献[2]	文献[8]	本文
K	—	0.771 3	0.918 6	0.928 9
SNR(dB)	10.860 5	16.513 1	16.459 5	16.457 8
迭代次数	—	30	30	17
耗时(sec)	—	3.847	1.926	1.012

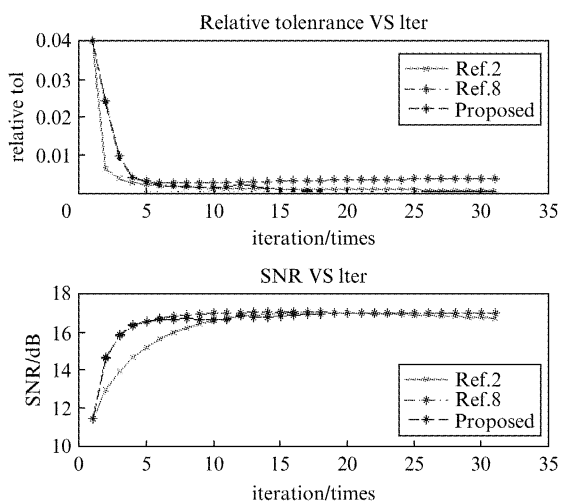


图4 信噪比、相对误差与迭代次数关系  
Fig.4 Relationship between iteration times and SNR, relative deviation

从上面的图表中可以看出,三种算法所能达到的最大SNR相差不多,也就是说降噪效果相差不多.在保留细节方面,文献[2]方法明显不如其他两种,图像有一定的模糊.对于同一收敛阈值,文献

[2]和文献[8]算法迭代30次都不能收敛,而本文算法由于每一次迭代都会自动的调整罚参数和拉格朗日乘子,使得每一次的迭代解都会更趋近于目标函数的可行域,因而只需要迭代17次就能收敛到阈值,耗时也就更少.

为了进一步说明本文算法在工程上的实用性和可行性,将其应用在实际的红外含噪图像降噪问题中,图5为某国产长线列红外探测器所采集的图像,含有比较明显的竖条纹噪声,图6是应用本文方法去噪的结果,对比可以看出,竖条纹噪声得到了很好的抑制,图像视觉效果有较为明显的改善.



图5 含噪红外图像  
Fig.5 Noisy IR image



图6 本文方法降噪后图像  
Fig.6 Denoising by proposed method

## 4 结论

本文在研究 Split Bregman 算法的基础上,通过调节每一次 Bregman 迭代的拉格朗日乘子  $\lambda$  和罚参数  $\mu$ ,提出一种自适应 Split Bregman 算法.新算法对  $\lambda, \mu$  的初值并不敏感,实验结果表明,对于同一迭代收敛阈值,本文算法比文献[2]和文献[8]算法能够更快的收敛,而且具有较好的降噪和边缘保持效果.除此之外,新算法能够收敛到更小的迭代阈值,也就是说求得的最优解能更加接近真实解.之后,将本文算法应用于实际的红外图像降噪,取得了明显的效果,表明了该算法的应用实际工程的可行性.

然而,虽然新算法能有效地实现图像降噪,但是假设的噪声为标准高斯白噪声,对于其他噪声类型

的降噪还有待进一步研究,同时罚参数  $\mu$  的更新条件只考虑了  $x$  方向,如何兼顾  $x, y$  两个方向也是值得探讨的问题.

## References

- [1] ZHANG Hongying, PENG Qicong. Adaptive image denoising model based on total variation [J]. *Opto-Electronic Engineering* (张红瑛, 彭启琮. 全变分自适应图像去噪模型. *光电工程*), 2006, **33**(2): 50.
- [2] Lenoid I. Rudin, Stanley Osher, Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. 1992, *Physica D*, **60**: 259 - 268.
- [3] LIU Yanxiong, DING Xuanhao. Split Bregman algorithm of the weighted variation model for image denoising [J]. *Journal of Guilin University of Electronic Technology* (刘燕雄, 丁宣浩. 加权变分去噪模型的分裂 Bregman 算法, *桂林电子科技大学学报*), 2011, **31**(4): 322 - 325.
- [4] NIU Heming, DU Qian, ZHANG Jianxun. An Algorithm of Adaptive Total Variation Image Denoising [J]. *PR&AI* (牛和明, 杜茜, 张建勋. 一种自适应全变分图像去噪算法. *模式识别与人工智能*), 2011, **24**(6): 798 - 803.
- [5] Wotao Yin, Stanley Osher, Donald Goldfarb, Jerome Darbon. Bregman Iterative Algorithms for L1-Minimization with Applications to Compressed Sensing [J]. *SIAM Journal of Imaging Sciences*, 2008, **1**(1): 143 - 168.
- [6] Elaine T. Hale, Wotao Yin, Yin Zhang. A Fixed-Point Continuation Method for L1-Regularized Minimization with Applications to Compressed Sensing [R]. *CAAM Technical Report*, 2007, TR07 - 07.
- [7] Elaine T. Hale, Wotao Yin, Yin Zhang. Fixed-Point Continuation Applied to Compressed Sensing: Implementation and Numerical Experiments [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2010, **28**(2): 170 - 194.
- [8] Tom Goldstein, Stanley Osher. The Split Bregman Method for L1 Regularized Problems [J]. *SIAM Journal of Imaging Sciences*, 2009, **2**(2): 323 - 343.
- [9] YU Ruiyan, LIU Wen. A Fast Algorithm for Solving Total Variation Model Based Image Denoising [J]. *Journal of WUT (Information and Management Engineering)* (余瑞艳, 刘文. 全变差图像去噪模型的快速求解. *武汉理工大学学报(信息与管理工程版)*), 2011, **33**(2): 197 - 199.
- [10] Antonin Chambolle, Pierre-Louis Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. *Numerische Mathematic*. 1997, **76**: 167 - 188.
- [11] HUANG Wenhui, CHEN Renlei, ZHANG Jiamou. Improvement and Implementation of Objective Digital Video Quality Measurement [J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications* (黄文辉, 陈仁雷, 张家谋. 数字视频图像质量客观观测方法的改进与实现. *北京邮电大学学报*), 2005, **28**(24): 88 - 89.