

半无限板条中任意形亚表面缺陷的热波散射

马晓波¹, 谈和平², 胡超³

(1. 同济大学机械工程学院, 上海 200092; 2. 哈尔滨工业大学能源科学与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;
3. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 基于非傅里叶热传导方程, 采用复变函数与保角映射方法, 研究了半无限板条结构中任意形亚表面缺陷的热波的多重散射问题, 给出了热波散射问题的一般解. 温度波由调制光束在材料表面激发, 缺陷表面的边界条件为绝热. 分析了结构几何和物理参数对热波散射与温度分布的影响, 并给出了温度变化的数值结果. 分析方法和数值结果可为工程材料结构的热传导分析、热波成像、物理反问题和材料内部缺陷评估等提供理论基础和参考数据.

关键词: 非傅里叶导热; 任意形亚表面缺陷; 热波散射与温度分布; 超短激光脉冲

中图分类号: TK124; TN247 **文献标识码:** A

Scattering of thermal waves by subsurface defects of arbitrary shape buried in a semi-infinite slab

MA Xiao-Bo¹, TAN He-Ping², HU Chao³

(1. School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
3. School of Aerospace Engineering and applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on non-Fourier equations of heat conduction, using the complex function and conformal mapping technique, multiple scattering of thermal waves by subsurface defects of arbitrary shape in the semi-infinite slab was investigated. A general solution of thermal wave scattering was given. The thermal waves are excited at surfaces of solid materials by modulated ultra-short laser pulse with a adiabatic boundary condition for defects. The effects of geometrical and physical parameters on the temperature distribution are analyzed. Meanwhile, the numerical results of temperature variation were demonstrated. The analytic method and numerical results can be used for analysis of heat conduction, thermal wave imaging, physical inverse problem and evaluation of internal defects in materials.

Key words: non-Fourier heat conduction; subsurface defect of arbitrary shape; scattering of thermal waves and temperature distribution; ultra-short laser pulse

PACS: 44.10.+i

引言

可通过控制超短激光脉冲激发的频率和幅值, 测量固体表面的温度场变化, 获取材料的亚表面微结构信息, 实现对材料的热波探测和无损评估. 在超急速加热等极端情况下, 固体介质内的导热过程须采用关于温度的双曲型方程, 即波动型方程, 其分析计算结果更接近工程实际^[1,2].

目前, 对热波散射问题的研究, 多是采用半无限体结构模型. 只有当热扰动传播方向尺度远大于材

料的热力学厚度时, 即可简化成此种物理模型进行分析计算. 一般来说都是假设缺陷是圆形的, 并且也都没有考虑实际结构的其它几何尺寸有界性的影响^[3-9]. 对于任意形孔洞, 由于偏微分方程满足边值条件的困难, 难以对问题进行解析求解. 采用复变函数方法求解任意形孔洞的平面问题有其独特的优点, 前苏联力学家 G. V. Kolosov 及 N. I. Muskhelishvili 曾对孔洞应力集中做出了开创性工作^[10]. 而后, D. K. Liu 提出了求解波动方程的任意形孔洞的边值问题的方法^[11], 拓展了经典位势调和方程边值问

收稿日期: 2010-01-27, 修回日期: 2010-10-22

Received date: 2010-01-27, revised date: 2010-10-22

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(50336010); 面上项目(20451057)

作者简介: 马晓波(1965-), 女, 黑龙江哈尔滨人, 同济大学机械工程学院副研究员, 博士, 主要从事工程中导热与辐射问题的分析和计算, E-mail: maxiaobo_tj@163.com.

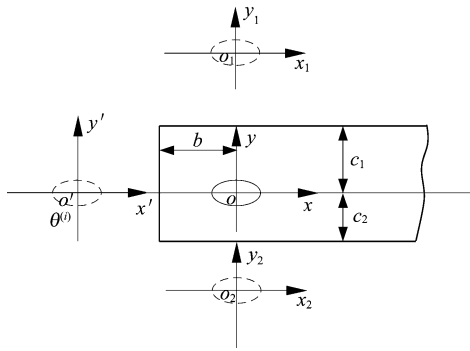


图 1 脉冲加热和物体结构图
Fig. 1 Laser pulse heating on specimen

题的复变函数方法,是求解复杂边界形状波动问题的开创性方法. 本文将基于非 Fourier 热传导方程,研究含任意形亚表面缺陷的半无限板条中热波多重散射问题. 分析入射波参数、几何结构和物理参数等对温度分布的影响.

1 热传导的波动型方程及其一般解

设研究对象是一个半无限条形体结构,如图 1 所示. 假设在垂直于 (x, y) 平面的方向上温度场的分布是均匀的. 根据非 Fourier 导热定律,无内热源时固体介质内的温度控制方程为^[2]

$$\nabla^2 T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

式中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子; λ, c_p, ρ 分别为材料的导热系数、定压比热容和密度; $D = \lambda/\rho c_p$ 是热扩散率; $c = \sqrt{D/\tau}$ 是热波传播速度; τ 为热弛豫时间; T 为固体介质内的温度.

设方程(1)的周期非稳态温度场为 $T = T_m + \text{Re}[\vartheta \exp(-i\omega t)]$, 则温度 ϑ 应满足如下方程

$$\nabla^2 \vartheta + \kappa^2 \vartheta = 0 \quad (2)$$

式中, Re 表示取实部; $\theta = T_{\max} - T_m$ 是过余温度值, 而 T_{\max}, T_m 分别物体内峰值温度和环境平均温度; $\omega = 2\pi f$ 为圆频率; κ 为复波数, $\kappa = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\omega}{D}\right)^{1/2} = \alpha$

$$\begin{aligned} \vartheta^{(s)} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (-1)^{n+1} H_n^{(1)}(\kappa |z-z_0|) \left\{ \frac{z-z_0}{|z-z_0|} \right\}^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^l \\ & \times H_n^{(1)}(\kappa |z-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_{lm}}{|z-z_{lm}|} \right\}^{(-1)^l n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (-1)^{n+1} \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^l H_n^{(1)}(\kappa |z-z_0-z_{lm}|) \left\{ \frac{z-z_0-z_{lm}}{|z-z_0-z_{lm}|} \right\}^{(-1)^{l+1} n} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $z_0 = -2b; z_{1m} = i2(mL - c_2); z_{2m} = i2mL; z_{3m} = -i2[(m-1)L + c_2]; z_{4m} = -2imL; L = c_1 + c_2; m = 1, 2, \dots, \infty; r = |\Omega(\zeta)|; \exp(i\varphi) = \Omega(\zeta)/|\Omega(\zeta)|.$

$+i\beta; i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位; α, β 分别为热传播波的波数和衰减系数,经规范化后,可取 $\alpha > 0, \beta > 0$, 即

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \frac{\omega^2}{D^2} + \frac{\omega^2}{c^2}} \right]} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{2}k^2}}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \frac{\omega^2}{D^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right]} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{\mu^4} - \frac{1}{2}k^2}}, \end{aligned}$$

其中, k 为无扩散效应时热波波数 $k = \omega/c$.

引进复变量 $z = x + iy$, 则方程(2)可转化为如下形式

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z \partial \bar{z}} + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \vartheta = 0 \quad (3)$$

由方程(3)所决定的无限大固体介质中缺陷热波散射场的一般解为^[11]

$$\begin{aligned} \vartheta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa |\Omega(\zeta)|) \left\{ \frac{\Omega(\zeta)}{|\Omega(\zeta)|} \right\}^n \end{aligned} \quad (4)$$

式中, A_n 为缺陷产生的散射波模式系数,由边界条件确定; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为复宗量第一类 Hankel 函数; $z = \Omega(\zeta)$ 是将 z 平面上非圆缺陷边界映射至 ζ 平面上单位圆边界的映射函数.

设热波在 $x = -b$ 处沿 x 轴正方向入射. 当物体的上下表面与环境温度一致时,入射波可描述为

$$\begin{aligned} \vartheta^{(i)} &= \vartheta_0 \sin[q(c_2 + y)] e^{i[p(x+b) - \omega t]} \\ &= \vartheta_0 \sin[q(c_2 + y)] e^{ipb} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(pr) e^{in\theta} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, ϑ_0 为入射波的温度幅值,即过余温度 $\vartheta_0 = T_0 - T_m$; p 和 q 分别为温度波动纵向波数和横向波数, $p^2 = \kappa^2 - q^2; q = \frac{\pi}{c_1 + c_2}; J_n(\cdot)$ 为 Bessel 函数.

考虑到 $y = c_1$ 和 $y = -c_2$ 处结构边界对热波的反射,亚表面缺陷产生的热波散射场可描述为

$$\text{固体介质中热波总场应由入射波与散射波构成,其表达式为}$$

$$\vartheta^{(t)} = \vartheta^{(i)} + \vartheta^{(s)} \quad (7)$$

2 确定热波散射模式系数

式(7)满足亚表面缺陷($\rho = 1$)的温度边界条件,即可确定散射波模式系数.缺陷边界为绝热条件

$$\begin{aligned} \in_n = & \frac{1}{2} \kappa \text{Re} \left[\frac{\zeta z' \bar{z}}{|\zeta| \|z\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z|)] \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n + \text{nilm} \left[\frac{\zeta z'}{\zeta|z|} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \\ & + \frac{1}{2} \kappa (-1)^n \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|\zeta| \|z - z_0\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_0|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_0|)] \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^{-n} \\ & + \text{ni} (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_0)} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_0|) \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^{-n} \\ & + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^l \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_{lm})}{|\zeta| \|z - z_{lm}\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|)] \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^l n} \\ & + \text{ni} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_{lm})} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^l n} \\ & + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^{l+n} \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_0 - \bar{z}_{lm})}{|\zeta| \|z - z_0 - z_{lm}\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|) \\ & - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|)] \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^{l+1} n} \\ & + \text{ni} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_0 - z_{lm})} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^{l+1} n} \end{aligned}$$

$$\in = -\vartheta_0 \{ q \sin \varphi \cos [q(c_2 + y)] + i p \cos \varphi \sin [q(c_2 + y)] \} \exp[ip(x + b)]; X_n = A_n.$$

用 $e^{-is\theta}$ 乘以式(8)的两端,并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分,可得无穷代数方程组如下

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \in_n X_n = \in_s, \quad (n = s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (9)$$

方程中的各个矩阵元素可按如下公式确定

$$\in_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \in_n e^{-is\theta} d\theta; \in_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \in e^{-is\theta} d\theta,$$

式(9)即为确定热波散射模式系数 A_n 的无穷代数方程组.而后,可根据式(7)确定被测试物体的表面温度分布,其中, $x = -b, y = 0 \sim 4a, z = -b + iy$.

3 数值算例与讨论

对于一个长短轴半长分别为 r_1 和 r_2 的椭圆孔,可取保角映射函数为

$$z = \Omega(\zeta) = \frac{a}{1+e} \left(\zeta + \frac{e}{\zeta} \right), \quad (10)$$

式中, $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$.

取特征尺度为缺陷沿 x 轴方向的半轴长度 $r_1 = a$.采用无量纲量:缺陷长短轴之比分别取为 $r_1/r_2 = 3/4, 1.0, 4/3$,无扩散热波数 $ka = 0.01 \sim 2.0$,相对热扩散长度 $\mu/a = 0.1 \sim 5.0$,埋藏深度比 $b/a = 1.1 \sim 3.0$;缺陷与上下表面的距离分别为 $c_1/a = 5$.

下确定 A_n 的无穷代数方程组为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \in_n X_n = \in, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \in_n = & \frac{1}{2} \kappa \text{Re} \left[\frac{\zeta z' \bar{z}}{|\zeta| \|z\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z|)] \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n + \text{nilm} \left[\frac{\zeta z'}{\zeta|z|} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z|) \left\{ \frac{z}{|z|} \right\}^n \\ & + \frac{1}{2} \kappa (-1)^n \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|\zeta| \|z - z_0\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_0|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_0|)] \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^{-n} \\ & + \text{ni} (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_0)} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_0|) \left\{ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right\}^{-n} \\ & + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^l \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_{lm})}{|\zeta| \|z - z_{lm}\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|) - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|)] \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^l n} \\ & + \text{ni} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_{lm})} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_{lm}}{|z - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^l n} \\ & + \frac{1}{2} \kappa \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^{l+n} \text{Re} \left[\frac{\zeta z'(\bar{z} - \bar{z}_0 - \bar{z}_{lm})}{|\zeta| \|z - z_0 - z_{lm}\|} \right] [H_{n-1}^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|) \\ & - H_{n+1}^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|)] \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^{l+1} n} \\ & + \text{ni} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\zeta z'}{|\zeta| (z - z_0 - z_{lm})} \right] H_n^{(1)}(\kappa|z - z_0 - z_{lm}|) \left\{ \frac{z - z_0 - z_{lm}}{|z - z_0 - z_{lm}|} \right\}^{(-1)^{l+1} n} \end{aligned}$$

$\sim 30, c_1/a = 5. \sim 10.$

图2至图3绘出了基于波动方程分析含单个椭圆缺陷板条的数值结果.可以看到,物体表面温度的最大值发生在椭圆形缺陷的正前方.当板条的横向尺寸较小时,物体表面温度的最大值较大.当热波波数较小时,其结果与基于热扩散方程得到的值近似.此时可采用经典热传导方程分析计算.

图4至图5给出了不同椭圆偏心率下热波多重散射问题的数值结果.其中 $e = 0$ 对应于含单个圆柱缺陷板条中的散射情况.可以看到,含单个椭圆柱缺

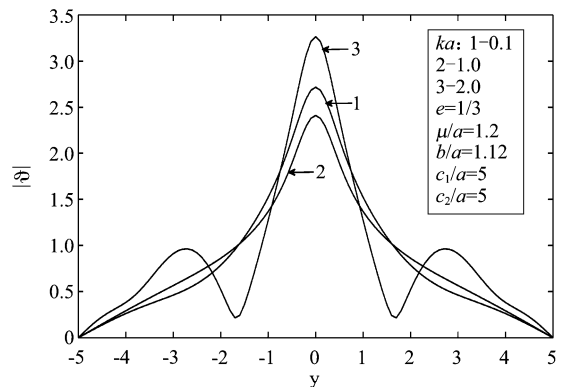


图2 物体表面温度分布
Fig. 2 Temperature at Surfaces of Slabs

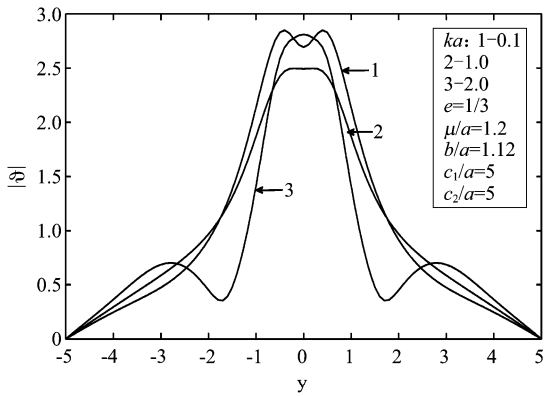


图3 物体表面温度分布
Fig.3 Temperature at Surfaces of Slabs

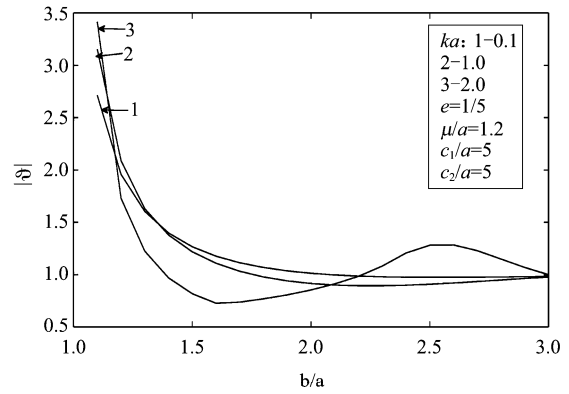


图6 埋藏深度对表面温度最大值的影响
Fig.6 Effects of depth on the temperature

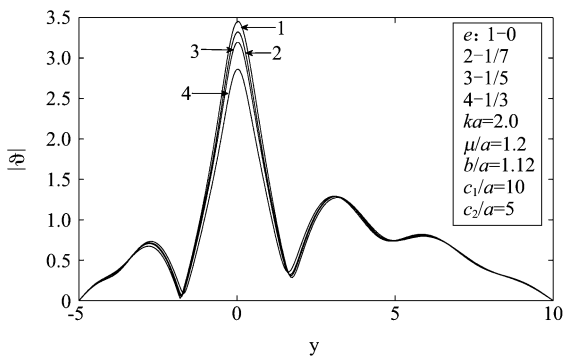


图4 物体表面温度分布
Fig.4 Temperature at Surfaces of Slabs

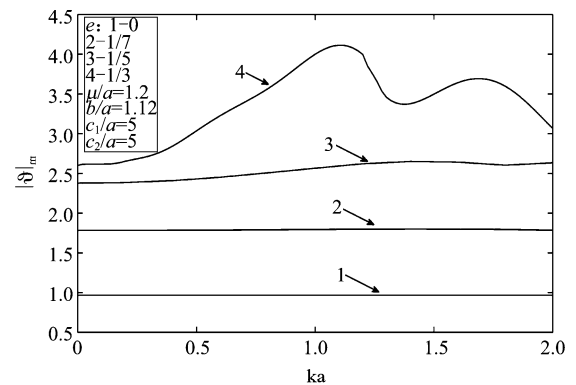


图7 物体表面最大温度随波数的变化
Fig.7 Maximum temperature versus wave number

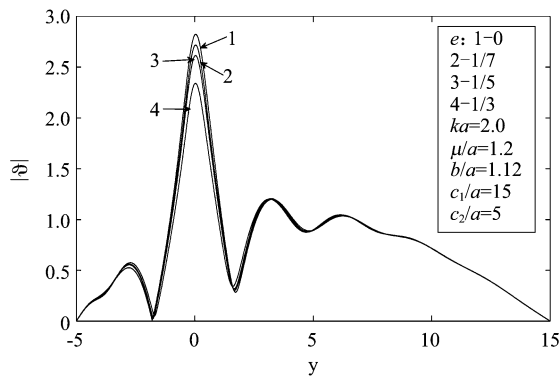


图5 物体表面温度分布
Fig.5 Temperature at Surfaces of Slabs

陷时的温度值要比含圆柱缺陷时的温度值小. 随着椭圆偏心率的增加,物体表面的温度值变小;当 $e > 0$ 时,即椭圆的长轴置于 x 轴时的温度分布与单圆柱缺陷的温度分布相比较,其变化不大;当 $e < 0$ 时,即椭圆的长轴沿 y 轴方向时的温度分布与单圆柱缺陷的温度分布相比较,也是减少但变化的幅度较大.

由图6可以看出,当缺陷埋藏深度较大时,温度

幅值变化减小;当相对热扩散长度较小时,波数 ka 比较大时温度的最大值也产生波动. 由图7可以看出,当热扩散长度较大或缺陷尺寸较小时,热传导的波动特性对温度影响较大. 波数 ka 比较大时,对应的是高频振动(短波情况). 当缺陷与横向尺寸相比较小时,缺陷正前方物体表面温度的值变小.

4 结论

本文首次给出了基于波动型导热模型的任意形亚表面缺陷热波多重散射问题的一般解. 并计算了在不同的物理和几何参数下温度分布的变化规律,给出了材料表面温度的分布变化曲线. 可以看到:

1. 含椭圆缺陷比含圆形缺陷时的温度值要小,并且椭圆偏心率越大,温度值减少的越多.
2. 随着偏心率的增加,物体表面的温度值变小. 当 $e > 0$ 时,含单个椭圆缺陷与含单个圆形缺陷情况相比,其温度值变化不大;当 $e < 0$ 时,即椭圆的长轴沿 y 轴方向时的温度分布与单圆柱缺陷的温度分布相比,也是减少但变化幅度较大.

(下转 275 页)