

文章编号: 1672-8785(2014)03-0001-06

试论光子的分裂

王忆锋 黄江平

(昆明物理研究所, 昆明 650223)

摘 要: 从有关基本概念出发, 介绍了黑体辐射定律的 MATLAB 推导过程。现有理论假设光子能量取值为 $nh\nu$ (其中 n 为整数, ν 为辐射的频率, h 为普朗克常数)。给出了光子能量取值为 $\alpha nh\nu$ ($0 < \alpha < 1, n=0, 1, 2, \dots$) 情况下的广义普朗克定律和广义斯蒂芬-玻尔兹曼定律。讨论了光子分裂的可能性问题。

关键词: 光子; 光子分裂; 黑体辐射定律; MATLAB

中图分类号: O 572.31 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1672-8785.2014.03.001

On the Photon Splitting

WANG Yi-feng, HUANG Jiang-ping

(Kunming Institute of Physics, Kunming 650223, China)

Abstract: Beginning with related basic concepts, the derivation of the blackbody radiation law by MATLAB is presented. It is assumed that the energy of photons is $nh\nu$ (where n is an integer number, h is Planck constant and ν is radiation frequency) in the existing theory. The Generalized Plank law and Stefan-Boltzman law with photon energy of $\alpha nh\nu$ ($0 < \alpha < 1, n=0, 1, 2, \dots$) are given. The possibility of photon splitting is discussed.

Key words: photon; photon splitting; blackbody radiation law; MATLAB

0 引言

1900 年, 普朗克提出了从加热物体表面发出的热辐射是不连续的假设, 即所谓的量子^[1]。这些量子的能量为 $\varepsilon = nh\nu$, 其中 n 为正整数, ε 为辐射频率, $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 为普朗克常数。 $\varepsilon_0 = h\nu$ 称为能量子^[2]。在普朗克量子假说的启发下^[3], 爱因斯坦提出了光量子的概念, 即光波也是由分立粒子组成的假设, 从而解释了光电效应。这种粒子化的能量称为光子, 并且同样有 $\varepsilon_0 = h\nu$ ^[1]。光子是光学以及量子物理中一个重要的基本概念。现有理论均假设光子能量的取值为 $h\nu$ 的 (正) 整数倍。本文引入一个系

数 α ($0 < \alpha < 1$), 利用 MATLAB 推导了光子能量取值为 $\alpha nh\nu$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 情况下的黑体辐射定律, 并由此提出了存在非整数倍光子的猜想, 其来源可能是光子与介质碰撞而导致的光子分裂。

1 有关基本概念

经典理论认为, 光辐射来源于带电粒子在其平衡位置附近的振动^[4], 当振幅不大时可以把它作为谐振子处理^[5]。每个物体都会通过发射和吸收与周围辐射场交换能量。与任何体系处于热平衡的辐射场, 其能谱皆为 $u(\nu, T)$ ^[2]。辐射场与谐振子之间的能量交换达到热平衡的条

收稿日期: 2014-01-20

作者简介: 王忆锋 (1963-), 男, 湖南零陵人, 工学士, 高级工程师, 主要从事器件仿真研究。

E-mail: wangyifeng63@sina.com

件为

$$u(\nu, T) = g(\nu) \bar{\varepsilon}(\nu, T) \quad (1)$$

式中, T 为温度, $g(\nu)$ 为单位体积、单位频率区间内的电磁波驻波模式数, $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$ 为平衡态下谐振子的能量平均值^[2]。对于一维波动来说, 在长度为 L 的区间形成驻波的条件是

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \quad (2)$$

式中, λ 为波长, n 为正整数。 k 称为波数。因为波长 λ 与真空光速 ($c=2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 大气中的光速非常接近这一速度值^[6]) 和频率 ν 有下列关系

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (3)$$

故波数还可以表示为

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} \quad (4)$$

三维情况下的 k 称为波数矢量, 记为 $\mathbf{k}$ 。在一个边长为 L 的立方体内形成三维驻波的条件为

$$\begin{aligned} k_1 &= k \cos \theta_1 = \frac{n_1 \pi}{L}, k_2 = k \cos \theta_2 = \frac{n_2 \pi}{L}, \\ k_3 &= k \cos \theta_3 = \frac{n_3 \pi}{L} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, n_1, n_2, n_3 均为正整数, 每一组 (n_1, n_2, n_3) 对应一种驻波模式; $\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ 为波数矢量的方向余弦。由于方向余弦满足^[7]

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$$

故由式 (5) 可得

$$k^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (6)$$

上式可以理解为以 k_1, k_2, k_3 为直角坐标构架一个 $\mathbf{k}$ 空间, 以 π/L 为间隔做三组坐标面, 将 $\mathbf{k}$ 空间分割为一系列小立方“相格”。每个相格的体积为 $(\pi/L)^3$, 代表一个可能的驻波模式。电磁波是横波, 对应一定的 $\mathbf{k}$ 有两个独立的偏振状态, 故每一个相格相当于电磁波的两个独立的自由度。如图 1 所示, 在 $0 \sim k$ 区间的驻波模式数

等于以 k 为半径的球体内包含的相格数 $N(k)$, 即球体的体积除以相格的体积

$$N(k) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi k^3}{3} \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 = \frac{k^3 L}{6\pi^2} \quad (7)$$

式 (7) 中的 $1/8$ 因子来源于 n_1, n_2, n_3 (从而 k_1, k_2, k_3) 都取正值, 故只取球体在第一卦限内的体积。

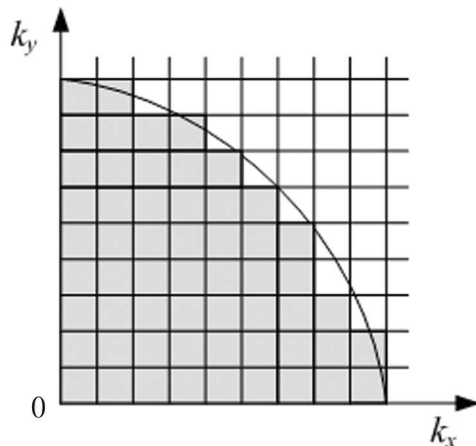


图 1 $\mathbf{k}$ 空间里的相格

将式 (7) 中的变量 k 换为变量 ν , 根据式 (4), 可得

$$N(\nu) = \frac{4\pi\nu^3 L^3}{3c^3} \quad (8)$$

将 $N(\nu)$ 对 ν 求导, 可得

$$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{4\pi\nu^2 L^3}{c^3} \quad (9)$$

单位体积、 ν 附近单位频率区间内的电磁波独立自由度数目的

$$g(\nu) = \frac{2}{L^3} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (10)$$

式 (10) 中的因子 2 来源于偏振自由度。至此式 (1) 可以写为

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon}(\nu, T) \quad (11)$$

剩下的问题就转为 $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$ 的计算。

2 能量连续取值下的黑体辐射公式

在热平衡态下, 能量为 ε 的概率正比于 $\exp(-\frac{\varepsilon}{k_B T})$ ($k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, 称为玻尔兹曼常数)。按照经典物理学的概念, 谐振子的能量 ε 在 $0 \sim \infty$ 之间连续取值, 从而有 [2]

$$\bar{\varepsilon}(\nu, T) = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon \exp(-\frac{\varepsilon}{k_B T}) d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon}{k_B T}) d\varepsilon} = k_B T \quad (12)$$

利用 MATLAB 的积分命令 `int()` 容易得到上述结果。

将式 (12) 代入式 (11), 可得

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (13)$$

根据式 (3), 当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, 有 $\lambda \rightarrow 0$, $u(\nu, T) \rightarrow \infty$, 即单色能谱趋于无穷大。另外对式 (13) 做积分

$$E = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu \rightarrow \infty \quad (14)$$

即总的辐射能量也趋于无穷大, 这被认为是荒谬的、不可接受的, 并被称为“紫外灾难” [2]。

3 能量离散取值下的黑体辐射公式

从计算角度来看, 在上述推导过程中, 能量趋于无穷大是谐振子能量连续取值的结果。为了摆脱困难, 普朗克假设谐振子的能量取值是断续的 [3], 只取某个基本单元的整数倍。文献 [2] 将此写为

$$\varepsilon = \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots \quad (15)$$

式 (15) 是一个等比级数, 可以用通项形式写为

$$\varepsilon_n = nh\nu, n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

文献 [3] 的写法是

$$\varepsilon_n = nh\nu, n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

如果将式 (17) 展开, 即有

$$0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots \quad (18)$$

表面上看, 两个数列仅在第一项有差异。下面介绍由这种差异造成的不同结果。

3.1 从 $n=0$ 开始做无穷级数求和

将式 (12) 中的无穷积分改为无穷级数求和, 并且下限从 $n=0$ 开始, 则有

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\nu, T) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp(-\frac{nh\nu}{k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{nh\nu}{k_B T})} = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) 可以通过执行下列 MATLAB 程序得到:

```
syms h k_B T n nu positive;
s1=symsum(n*h*nu*exp(-n*h*nu/k_B/T),n,0,inf);
% 分子项从 n = 0 开始做无穷级数求和
s2=symsum(exp(-n*h*nu/k_B/T),n,0,inf);
% 分母项从 n = 0 开始无穷级数求和
AverageEnergy=simple(s1/s2) % 化简结果
```

将式 (19) 代入式 (11) 即可写出普朗克定律

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \quad (20)$$

利用 MATLAB 的积分命令 `int()` 可得

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} d\nu \\ &= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} T^4 = \sigma T^4 \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 称为斯蒂芬 - 玻尔兹曼定律, 其中 $\sigma = 5.6705 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, 称为斯蒂芬 - 玻尔兹曼常数。

在光谱学 (包括红外技术) 中, 人们习惯于用真空中的波长 λ 而不是用频率 ν 来描述光波 [2], 因此需要将 $u(\nu, T)$ 转换为 $u(\lambda, T)$ 。这一转换过程不妨从量纲的角度来考虑, 如图 2 所示。

根据图 2, 可以写出

$$u(\nu, T) d\nu = u(\lambda, T) d\lambda \quad (22)$$

式中, $d\nu$ 和 $d\lambda$ 分别为微分项。由于取微分可能出现负值, 而能量为正值, 为此可引入绝对值, 即有

$$|u(\nu, T)d\nu| = |u(\lambda, T)d\lambda| \quad (23)$$

$$\begin{array}{l} u(\nu, T) \leftarrow \frac{\text{能量}}{\text{频率} \cdot \text{时间}} \rightleftharpoons u(\nu, T) \times \text{频率} \Rightarrow \frac{\text{能量}}{\text{时间}} \\ u(\lambda, T) \leftarrow \frac{\text{能量}}{\text{波长} \cdot \text{时间}} \leftarrow u(\lambda, T) \times \text{波长} \Rightarrow \frac{\text{能量}}{\text{时间}} \end{array}$$

图 2 $u(\nu, T)$ 和 $u(\lambda, T)$ 之间的量纲关系

作为能量项, $u(\nu, T)$ 和 $u(\lambda, T)$ 本身为正值, 故有

$$u(\lambda, T) = u(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| \quad (24)$$

因为

$$\left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right| = \frac{c}{\lambda^2} \quad (25)$$

至此根据式 (20)、(24) 和 (25), 可得

$$\begin{aligned} u(\lambda, T) &= u(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \frac{c}{\lambda^2} \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k_B \lambda T}) - 1} \end{aligned} \quad (26)$$

事实上, 文献 [2] 虽然将其写为 $\varepsilon = \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots$, 但是它在做无穷级数求和时还是从 $n = 0$ 开始的。

3.2 从 $n = 1$ 开始做无穷级数求和

在式 (19) 中, 将无穷级数求和的下限改为 1, 则有

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\nu, T) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nh\nu \exp(-\frac{nh\nu}{k_B T})}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{nh\nu}{k_B T})} \\ &= \frac{h\nu \exp(\frac{h\nu}{k_B T})}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \end{aligned} \quad (27)$$

式 (27) 可以通过执行下列 MATLAB 程度得到:

```
syms h k_B T n nu positive;
s1=symsum(n*h*nu*exp(-n*h*nu/k_B/T),n,1,inf);
% 分子项从 n = 1 开始做无穷级数求和
s2=symsum(exp(-n*h*nu/k_B/T),n,1,inf);
```

% 分母项从 $n = 1$ 开始无穷级数求和

AverageEnergy=simple(s1/s2) % 化简结果

将式 (27) 代入式 (11) 可得

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 \exp(\frac{h\nu}{k_B T})}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \quad (28)$$

根据式 (28) 和 (24), 则有

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k_B \lambda T}) - 1} \exp(\frac{hc}{k_B \lambda T}) \quad (29)$$

两者之间的差异如图 3 所示。

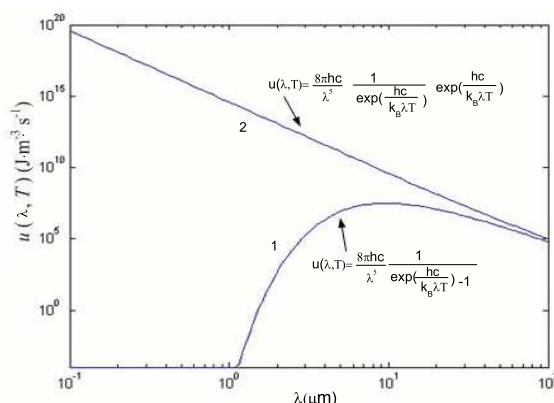


图 3 (1) 从 $n = 0$ 开始做无穷级数求和形成的函数曲线, 其形态与实验数据吻合得较好, 故被认可, 称为普朗克函数; (2) 从 $n = 1$ 开始做无穷级数求和形成的函数曲线, 其形态难以与实验数据吻合, 在数量级上已经显现出“紫外灾难”的趋势。

或许人们可以这样想像: 普朗克在取能量离散化以后, 虽然得到了收敛的结果, 但是还是不能全程逼近实验结果; 于是再引入 0 作为第一项, 结果发现不仅收敛, 而且全程较好吻合。从计算角度来看, 引入的第一项可以视为一个辅助项, 如同求解几何题中所画的辅助线一样。仅仅是数值计算上的一项之差, 拟合效果差距就如此之大, 实在令人惊异, 其物理意义似乎也令人费解、足以玩味。推敲之下, 至少可以提出以下两个问题:

(1) 有能量为 0 的光子吗?

(2) 在 0 到 $h\nu$ 之间是否还存在光子? 因为已经假定光子能量是 $h\nu$ 的整数倍, 如果有, 那么其能量应是 $h\nu$ 的小数倍, 例如 $0.5h\nu$ 之类。

比较一下式 (12) 和 (16) 可以看到, 两者之间的区别在于式 (12) 是做积分, 由此导致计算结果发散; 而式 (17) 是做无穷级数的求和, 由此导致计算结果收敛。人们不知道普朗克当初是如何想到用离散代替连续的; 为什么要用整数倍、而不用分数倍也未见论及。既然整数倍可以, 分数倍是否也可行?

3.3 广义的黑体辐射定律

在式 (17) 的基础上, 引入一个系数 α ($0 < \alpha < 1$)

$$\varepsilon_n = \alpha n h \nu, n = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

执行下列程序

```
syms alpha h k_B T x c n nu positive
```

```
s1=alpha*h*nu
```

```
*symsum(n*exp(-alpha*n*h*nu/k_B/T),n,0,inf)
```

```
s2=symsum(exp(-alpha*n*h*nu/k_B/T),n,0,inf)
```

```
AverageEnergy=simple(s1/s2)
```

可得

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\nu, T) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T})} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha n h \nu \exp(-\frac{\alpha n h \nu}{k_B T})}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\alpha n h \nu}{k_B T})} = \frac{\alpha h \nu}{\exp(\frac{\alpha h \nu}{k_B T}) - 1} \end{aligned} \quad (31)$$

将式 (31) 代入式 (11), 可得

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\alpha \nu^3}{\exp(\frac{\alpha h \nu}{k_B T}) - 1} \quad (32)$$

根据式 (20)、(24) 和 (25), 可以写出

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{\alpha}{\exp(\frac{\alpha h c}{k_B \lambda T}) - 1} \quad (33)$$

可见当 $\alpha=1$ 时, 式 (32) 等同于式 (20), 式 (33) 等同于式 (26); 或者说, 式 (20) 为式 (32) 的特例, 式 (26) 为式 (33) 的特例。式 (32) 和 (33) 可以称为广义的普朗克定律。利用 MATLAB 的积分命令 `int()` 可得

$$E = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{\alpha h \nu}{\exp(\frac{\alpha h \nu}{k_B T}) - 1} d\nu$$

$$= \alpha^3 \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} T^4 = \alpha^3 \cdot \sigma T^4 \quad (34)$$

可见当 $\alpha=1$ 时, 式 (34) 等同于式 (21); 或者说, 式 (21) 只是式 (34) 的特例。式 (34) 可以称为广义的斯蒂芬-玻尔兹曼定律。

4 光子分裂的讨论

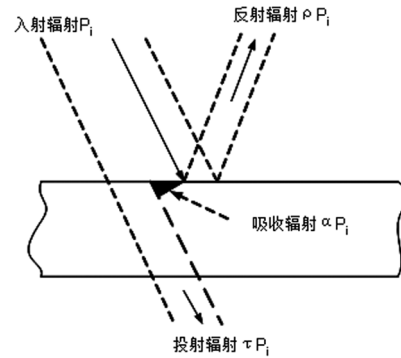


图 4 辐射在物体表面的吸收、反射和透射

设总功率为 P_i 的能量投射到某一物体表面上后分成三部分, 一部分 P_α 被吸收, 另一部分 P_ρ 被反射, 还有一部分 P_τ 透射进入该物体, 如图 4 所示, 则有

$$P_\alpha + P_\rho + P_\tau = P_i \quad (35)$$

将式 (35) 两边各除以 P_i , 可得

$$\frac{P_\alpha}{P_i} + \frac{P_\rho}{P_i} + \frac{P_\tau}{P_i} = 1 \quad (36)$$

式 (36) 等号左边第一项称为物体的吸收率 α , 第二项称为物体的反射率 ρ , 第三项称为物体的透过率 τ , 故有

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (37)$$

三者显然满足这样的关系 $0 \leq \alpha, \rho, \tau \leq 1$ 。另外根据基尔霍夫定律, 发射率 ε 等于吸收率 α , 即

$$\varepsilon = \alpha \quad (38)$$

设想用一个足够灵敏的实验系统观察一个单光子与介质的碰撞。似乎可以提出下列几个问题或看法:

(1) 式 (37) 对于单光子是否成立? 如果成立而光子又不能分裂, 那么反射和透射的能量又是如何产生的?

(2) 基尔霍夫定律对于单光子是否成立? 如果成立, 那么剩余的能量以何种形式转移? 如果不成立, 介质表面对于单光子的吸收规律又是什么?

在能量守恒的前提下, 作为一个示例, 假定光子一分为二:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2\lambda} + \frac{hc}{2\lambda}$$

即假定普朗克常数 h 和光速 c 不变, 则分裂形成的光子波长将变大, 这样就形成了分数光子。

(3) 光子与介质碰撞后发生分裂, 形成衍射和干涉。另一方面, 光子与介质碰撞后究竟分裂成几块具有随机性;

(4) 光学有几何光学与波动光学之分。几何光学是以光线的概念来说明辐射场的传播的^[8]。从一般性的描述来看, 光线分裂并不是一个新概念。例如, 光到达小孔时将发生衍射, 向不同方向传播。这时一根光线将分为多根光线^[9]。当然光线分裂与光子分裂并不是一回事。但是, 如果光子可以分裂, 那么光线分裂就是一件再自然不过的事了。

5 结束语

事实上, 光子是否可以分裂, 并不是一个没有被探讨过的问题。在互联网上输入检索关键词 photon splitting 就可以看到这一点。

一般而论, 一个物理模型应当收敛, 而且应与 (正确的) 实验现象吻合。从计算的角度来看, 所谓“紫外灾难”是因做无穷积分而导致的结果发散; 把无穷积分改为无穷级数求和, 即可以得

到收敛的结果, 其物理意义就是能量取值离散化。离散取值的方式无非就是以下两种:

(1) 整数倍取值, 这就是普朗克假设, 由此得到的结果是收敛的, 并且与实验结果的吻合度较好;

(2) 分数倍取值, 由此得到的结果也是收敛的, 如前所示。从计算上说, 分数取值是合理的。它至少表明, 假如存在分数大小的光子, 则其能量值是可以计算的。而至于到底是否存在分数大小的光子, 则要通过实验来检验和确认。在同样的演绎逻辑下, 有没有分数大小的光子, 可能是一个既难以肯定又难以否定的问题。进一步说, 如果分数光子存在, 那么与之对应的或许是广义量子数^[10]。

参考文献

- [1] Donald A N 著. 赵毅强, 姚素英, 解晓东, 等译. **半导体物理与器件 (第三版)**[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [2] 赵凯华, 罗蔚茵. **量子物理**[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] 井孝功. **量子力学**[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004.
- [4] 马声全, 陈贻汉. **光电子理论与技术**[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [5] 犬石嘉雄, 滨川圭弘, 白藤纯嗣著. 张志杰, 郝小林, 雷京贵, 等译. 周绍康校. **半导体物理**[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [6] Liou K N 著. 郭彩丽, 周诗健, 译. 周秀骥, 张文建, 校. **大气辐射导论 (第 2 版)**[M]. 北京: 气象出版社, 2004.
- [7] 《数学手册》编写组. **数学手册**[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004(第 10 次印刷).
- [8] Marcuse D 著. 郭彩丽, 程希望译. 刘弘度校. **传输光学** [M]. 北京: 人民邮电出版社, 1987.
- [9] 刘正君. **MATLAB 科学计算与可视化计算宝典**[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [10] 王忆锋, 唐利斌. 一维方势阱束缚态能量本征值的 MATLAB 行列式分析及广义量子数概念 [J]. **红外**, 2010, 31(5): 41-44.