

文章编号: 1672-8785(2011)04-0028-07

# 基于双正交小波的光阑小波滤波器

闫红秀 陶纯匡 汪 涛 汪雨寒

(重庆大学物理学院, 重庆 400030)

**摘 要:** 提出了一种应用于 4f 光学系统的光学小波滤波器的设计与制作方法。结合光学信号的优势与小波变换的优点, 利用双正交小波的共轭镜像特性构造出了频域形式的分解和重构滤波器。通过将滤波器放置在 4f 系统的频谱面上对图像成功实现了二维分解和重构。另外还根据信息处理要求和采样器件的特性, 制作了振幅型和位相型两种小波滤波器。这两套滤波器都可以完整地分解和重构图像, 因而进一步推进了光学小波变换实现图像数据的实时压缩, 为图像的快速传输奠定了基础。该方法是 4f 系统频谱滤波器上的一种创新。选用离散的 Bior2.2 小波进行了仿真与实验。实验结果表明, 这种方法具有可行性。

**关键词:** 光学滤波; 小波变换; 4f 系统; 光阑; 张量积

**中图分类号:** O438.2 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1672-8785.2011.04.007

## Optical Wavelet Filter Based on Biorthogonal Wavelets

YAN Hong-xiu, TAO Chun-kuang, WANG Tao, WANG Yu-han

(College of Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** A method for designing and constructing optical wavelet filters for 4f optical systems is proposed. Frequency domain decomposition and reconstruction wavelet filters are constructed according to the advantages of optical signals and wavelet transform and the conjugate mirror characteristics of biorthogonal wavelets. The filters can implement two-dimensional decomposition and reconstruction of images successfully when they are placed on the spectrum surfaces of 4f optical systems. In addition, both amplitude wavelet filters and phase wavelet filters constructed according to the information processing needs and sampling device properties can also decompose and reconstruct images completely. This method is an innovation in frequency filters for 4f optical systems. It is simulated by using the discrete Bior 2.2 wavelet in experiment. The experimental result shows that this method is feasible.

**Key words:** optical filtering; wavelet transform; 4f system; optical lens screen; tensor product

### 1 引言

在典型 4f 光学系统的频谱面上添加滤波片是实现光学滤波和进行光学信息处理的常用方法。其中, 滤波片一般使用胶片、全息图、光栅

和空间光调制器 (SLM)。由于 4f 系统本身是一种低通滤波系统, 而且传统滤波器的精度不高, 人们需要进一步开发高性能滤波器, 以发挥光学信息处理的优势。近年来, 随着小波理论的飞速发展, 小波变换凭借其良好的性能, 在图像压

**收稿日期:** 2011-03-01

**作者简介:** 闫红秀 (1980-), 女, 河南濮阳人, 硕士, 主要从事光学信号处理方面的研究。E-mail: Yanhongxiu2010@163.com

缩、边缘检测、模式识别、信号处理以及图像处理等领域得到了广泛应用。但图像小波压缩的计算量大, 其处理时间便成了制约图像数据压缩的一个关键因素。与电子信息系统相比, 光学信息处理系统的最大优势是其高速度、并行性以及互联性。它通过将光学方法与小波变换结合起来进行光学小波变换, 将小波变换时间提高到了光速数量级, 为图像的快速传输奠定了基础, 并向光计算方向迈出了一小步。

光学小波变换已用于边缘提取、特征提取和模式识别等领域, 并显示出了良好的应用前景。1996 年, Quzieli 等人提出了二维小波变换的光学实现方法<sup>[1]</sup>, 有关文献也介绍了数字信号处理领域中 Mallat 算法的光学实现方法<sup>[2]</sup>, 但是它也仅限于小波分解部分, 而小波重构部分仍然是利用计算机通过数值计算来实现的, 这就限制了光学小波滤波器的进一步推广。本文从多分辨率分析理论出发, 基于 Mallat 算法的核心思想和 4f 光学系统的基本原理, 利用张量积法构造出频域形式的光学小波分解和重构滤波器, 并根据图像处理的要求, 给出了相应的设计与制作方法。

## 2 多分辨率分析与 Mallat 算法

多分辨率分析的基本思想是构造一串嵌套的线性函数空间  $\{V_j, j \in Z\}$ 。对于任意  $f(t) \in L^2(R)$ ,  $D_{V_j} f = D_{V_{j+1}} f + D_{W_{j+1}} f$ 。其中,  $D_{V_{j+1}} f$  包含了  $f(t)$  的低频部分, 而  $D_{W_{j+1}} f$  提供了  $f(t)$  的细节部分, 即高频部分。Mallat 算法在多分辨率分析中具有类似于快速傅里叶算法在傅里叶分析中的地位和作用。在 Mallat 算法中, 与小波函数  $\psi(t)$  和尺度函数  $\phi(t)$  相联系的是两个数字滤波器。其中, 与  $\phi(t)$  相关的是低通滤波器  $h(n) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{t}{2}), \phi(t-n) \rangle$ ; 而与  $\psi(t)$  相关的是高通滤波器  $g(n) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\frac{t}{2}), \phi(t-n) \rangle$ 。通过多分辨率分析可以对给定函数的小波系数进行快速的系统计算。下面介绍每一级小波分解和重构的快速算法。

小波分解:

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{h}(2p) \quad (1)$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{g}(2p) \quad (2)$$

小波重构:

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n]d_{j+1}[n] \\ &= \hat{a}_{j+1} * h(p) + \hat{d}_{j+1} * g(p) \end{aligned} \quad (3)$$

初始离散信号可以通过对连续信号的采用得到。

构造多维小波基的最简单常用的方法是张量积法。通过这种方法可以很容易地将一维多分辨率分析推广到二维多分辨率分析, 而且利用张量积法还可将 Mallat 算法由一维推广到二维。假设用于分解的一维离散小波滤波器组的低通和高通分别为  $h(n)$  和  $g(n)$ , 采用张量积法构造用于分解的二维离散小波滤波器<sup>[2]</sup>:

低通滤波器:

$$h(m, n) = h(m)h(n) \quad (4)$$

水平高通滤波器:

$$g^h(m, n) = g(m)h(n) \quad (5)$$

垂直高通滤波器:

$$g^v(m, n) = h(m)g(n) \quad (6)$$

对角高通滤波器:

$$g^d(m, n) = g(m)g(n) \quad (7)$$

二维 Mallat 算法的分解公式为

$$\begin{aligned} a_{j+1}(m, n) &= \sum_k \sum_l h(k-2m)h(l-2n)a_j(k, l) \\ &= a_j(m, n) * h(2m, 2n) \end{aligned} \quad (8)$$

同理,

$$d_{j+1}^h(m, n) = a_j(m, n) * g^h(2m, 2n) \quad (9)$$

$$d_{j+1}^v(m, n) = a_j(m, n) * g^v(2m, 2n) \quad (10)$$

$$d_{j+1}^d(m, n) = a_j(m, n) * g^d(2m, 2n) \quad (11)$$

假设用于重构的一维离散小波滤波器组的低通和高通分别为  $\bar{h}(n)$  和  $\bar{g}(n)$ ，则采用张量积法构造的用于重构的二维离散小波滤波器分别为

低通滤波器:

$$\bar{h}(m, n) = \bar{h}(m)\bar{h}(n) \quad (12)$$

水平高通滤波器:

$$\bar{g}^h(m, n) = \bar{g}(m)\bar{h}(n) \quad (13)$$

垂直高通滤波器:

$$\bar{g}^v(m, n) = \bar{h}(m)\bar{g}(n) \quad (14)$$

对角高通滤波器:

$$\bar{g}^d(m, n) = \bar{g}(m)\bar{g}(n) \quad (15)$$

二维 Mallat 算法的重构公式为

$$\begin{aligned} a_j(m, n) &= \sum_k \sum_l h(m-2k)h(n-2l)a_{j+1}(k, l) \\ &+ \sum_k \sum_l g(m-2k)h(n-2l)d_{j+1}^h(k, l) \\ &+ \sum_k \sum_l h(m-2k)g(n-2l)d_{j+1}^v(k, l) \\ &+ \sum_k \sum_l g(m-2k)g(n-2l)d_{j+1}^d(k, l) \\ &= a_{j+1}(m, n) * \bar{h}(m, n) + d_{j+1}^h(m, n) * \bar{g}^h(m, n) \\ &+ d_{j+1}^v(m, n) * \bar{g}^v(m, n) + d_{j+1}^d(m, n) * \bar{g}^d(m, n) \quad (16) \end{aligned}$$

Mallat 算法的本质是离散输入信号与离散小波滤波器系数之间的卷积，而 4f 光学系统可以实现输入信号与滤波函数的卷积运算，因此利用 4f 系统可以实现二维光学小波变换。

### 3 滤波器的设计与制作

#### 3.1 4f 系统的基本原理

图 1 所示为 4f 光学系统，它是一种典型的光学信息处理系统<sup>[4]</sup>。

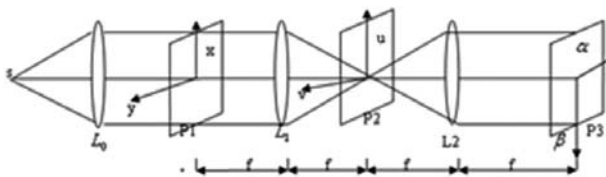


图 1 4f 光学系统

将输入信号  $f(x, y)$  置于 4f 光学系统的输入面 P1。经傅里叶变换透镜 L1 后，该输入信号  $f(x, y)$  在频谱面 P2 上形成傅里叶变换频谱:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{x}{\lambda f} + \frac{y}{\lambda f})} dx dy \quad (17)$$

式中， $u$  和  $v$  为频谱面坐标， $f$  为透镜焦距， $\lambda$  为激光光源  $s$  的波长。设  $f_x$  和  $f_y$  分别为信号的水平方向和垂直方向的空间频率，则信号的空间频率与频谱面坐标的关系为

$$f_x = \frac{u}{\lambda f}, \quad f_y = \frac{v}{\lambda f} \quad (18)$$

设  $f_x \approx f_y \approx f_c$ ，则输入信号在频谱面上的能量分布范围为  $-f\lambda f_c \leq u, v \leq f\lambda f_c$ 。据此，在频谱面上设一加窗函数  $M(u, v) = \begin{cases} 1, & -f\lambda f_c \leq u, v \leq f\lambda f_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，以确定滤波器的大小。

如果在频谱面上放置滤波函数的谱  $H(u, v)$ ，那么在输出面上就可以得到  $F(u, v)H(u, v)$  的傅里叶逆变换，即输入信号与滤波函数的卷积运算  $f(x, y) * h(x, y)$ 。

#### 3.2 光学小波分解滤波器的构造

根据采样定理及截止频率  $f_c$ ，选择采样频率  $f_s = 2f_c$ ，采样间距  $T_s = 1/f_s = 1/2f_c$ <sup>[5]</sup>。以  $T_s$  为采样间距，构造滤波函数  $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t-nt)$ ， $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\delta(t-nt)$ 。采用张量积法构造二维滤波函数时，小波分解滤波器的函数分别为

低通滤波函数:

$$h(x, y) = h(x)h(y) \quad (19)$$

水平高通滤波函数:

$$g^h(m, n) = g(x)h(y) \quad (20)$$

垂直高通滤波函数:

$$g^v(x, y) = h(x)g(y) \quad (21)$$

对角高通滤波函数:

$$g^d(x, y) = g(x)g(y) \quad (22)$$

以低通滤波器为例, 其频域形式为

$$\begin{aligned} H(u, v) &= M(u, v) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}x + \frac{v}{\lambda_f}y)} dx dy \\ &= M(u, v) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m)h(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (23)$$

水平、垂直和对角高通滤波器的频域形式分别为

$$\begin{aligned} G^h(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m)g(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G^v(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m)g(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} G^d(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m)g(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (26)$$

### 3.3 光学小波重构滤波器的构造

根据 3.2 节, 同理可得到频域形式的二维重构滤波器, 低通、水平、垂直和对角高通滤波器分别为

$$\begin{aligned} \overline{H}(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h}(m)\overline{h}(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \overline{G^h}(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h}(m)\overline{g}(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \overline{G^v}(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g}(m)\overline{g}(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \overline{G^d}(u, v) &= M(u, v) \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g}(m)\overline{g}(n) e^{-j2\pi(\frac{u}{\lambda_f}mT_e + \frac{v}{\lambda_f}nT_e)} \end{aligned} \quad (30)$$

### 3.4 滤波器的实现

(1) 根据图像的大小确定滤波器的大小。例如, 我们需要处理的是一幅  $256 \times 256$  的图像, 则量化级数选择 256<sup>[6]</sup>。

(2) 选择具有对称性质的双正交小波。本实验选择 bior2.2 小波, 按照上述公式由一维小波系数构造一维小波函数, 并根据张量积法得到二维小波函数。



(a) 低通滤波器



(b) 水平高通滤波器



(c) 垂直高通滤波器



(d) 对角高通滤波器

图 2 振幅型分解滤波器

针对不同的应用背景需要选择不同的小波和合适的小波变换方法。现有的光学小波变换方法均是基于连续小波变换的, 只能用于边缘提取、特征提取和模式识别等领域, 无法用于许多如图像压缩等需要高精度重构的领域。而 Mallat 算法的本质是离散输入信号与离散小波滤波器系数之间的卷积, 因此我们选择离散信号的小波变换, 也就能用光学方法来实现 Mallat 算法。另外, 用 SLM 作采样器件时, 还要求小波是非负的实函数, 因此我们先选择 bior2.2 小波进行实验。当然本实验还可以选择 7/9 提升小波。

(3) 采用 3.2 节中介绍的方法, 经过交换分解和重构滤波器系数后, 计算得到二维频域形式的滤波器<sup>[7]</sup>。

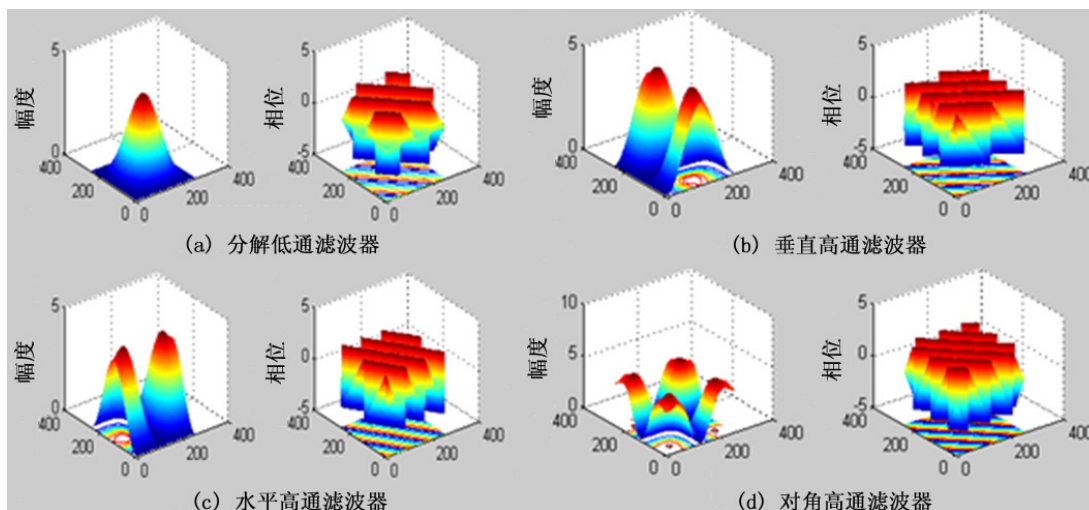


图 3 带有位相的复合型分解滤波器

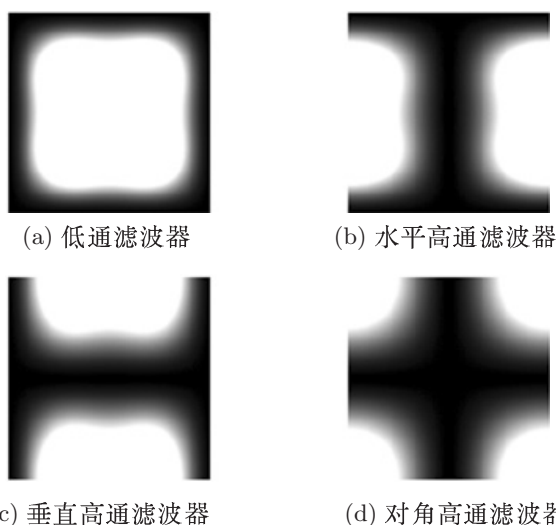


图 4 振幅型重构滤波器

(4) 用胶片拍摄或者利用 Zemax 软件将滤波器制成光阑形式。对于参数, 用透光度控制振幅, 用厚度控制相位。

根据以上步骤, 可以设计出两种形式的滤波器: 一种是振幅型滤波器 (见图 2 和图 4), 一种是带有位相的复合滤波器, 或者称为位相型滤波器 (见图 3 和图 5)。

## 4 光学实验结果

由于本次实验使用的是振幅型 SLM 和 CCD, 我们选用振幅型滤波器进行实验。

### 4.1 分解实验结果

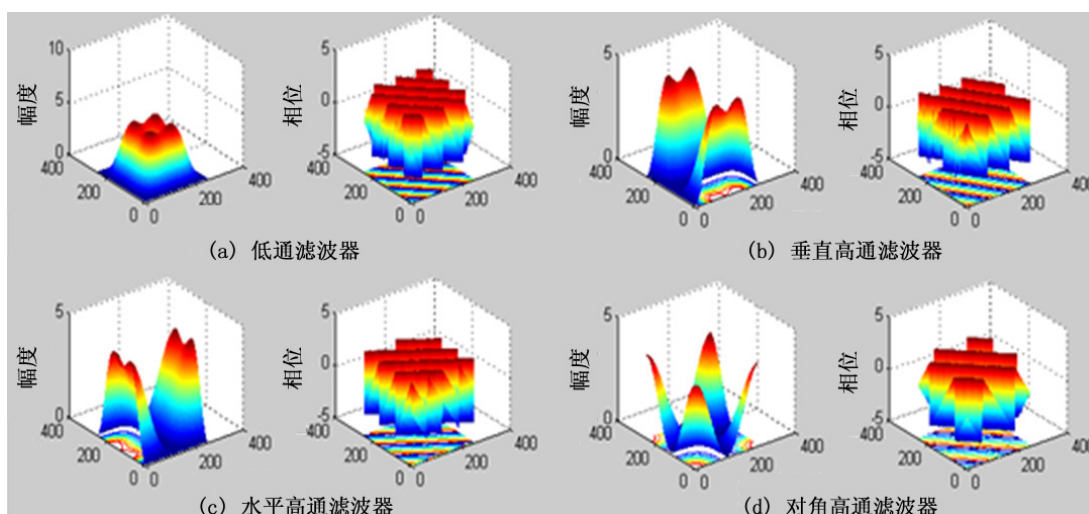


图 5 带有位相的复合型重构滤波器

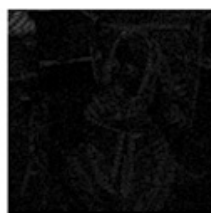
(1) 先对图像进行分解 (我们选择的测试图像是 Wbarb), 再将其加载到输入面上。

(2) 分别将 4 个通道的振幅型分解滤波器放在 4f 系统的频谱面上进行滤波; 或者为了便于调整, 将 4 个通道的同一类型滤波器做在一个旋转圆筒上, 各占 1/4, 每旋转 90° 就等于换了一个滤波器, 节省了实验时间。

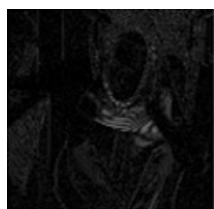
(3) 在输出面上采集的实验结果如图 6 所示。



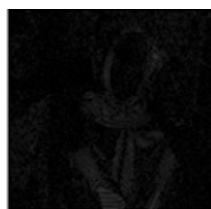
(a) 低通滤波分量



(b) 水平高通滤波分量



(c) 垂直高通滤波分量



(d) 对角高通滤波分量

图 6 振幅型滤波器的分解滤波结果

理论上, 我们也可将 4 个通道的带有位相的复合型滤波器和分解滤波器分别放在 4f 系统的频谱面上进行滤波。对于位相型滤波器, 由于需要先用 Zemax 软件根据其位相和振幅进行设计和加工, 然后才能进行实验。因此, 这里不作介绍。

#### 4.2 重构实验结果

将分解滤波结果分别作为输入物放到 4f 系统的输入面上, 再把重构滤波器分别放到频谱面上, 得到图 7 所示的重构结果。经过仿真计算可知, 峰值信噪比为无穷大, 而实际结果中重构信号的峰值信噪比为 27.8dB。

## 5 结论

与原始图像相比, 重构结果的清晰度明显下降, 重构信号的峰值信噪比只有 27.8dB, 精度有待提高, 这主要是由于光学实验中引入的光

学系统噪声造成的。此外, 目前商用空间光调制器的分辨率有限, 难以处理高分辨率图像。解决这些问题都有赖于光学器件工艺水平的进一步提高和光学系统性能的改善。



图 7 光学小波变换重构结果



图 8 原始输入图像

另外, 本实验只是处理静态图像, 离动态图像处理还有一段距离。然而本文在高分辨率分析理论的基础上, 利用 4f 系统的基本原理实现了二维光学小波滤波器。实验结果初步验证了利用实物形式光学小波滤波器的可行性, 并可直接实现光学空间滤波, 直接将小波变换时间提高到光速数量级, 发挥了光学信息处理的优势。这是向光计算方向迈出的小一步。

## 参考文献

- [1] Ouzieli I, Mendlovic D. Two-dimensional Wavelet Processor [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(29): 5839-5846.
- [2] 韩亮, 田逢春, 徐鑫, 等. Mallat 算法的光学实现 [J]. *光学精密工程*, 2008, **16**(8): 1491-1499.
- [3] 唐小初. *小波分析及其应用* [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2006.

- [4] D Mendlovic, H M Ozaktas, A W Lohmann. Fractional Correlation [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(2): 303–309.
- [5] 宋菲君. 近代光学信息处理 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.
- [6] 才德, 严瑛白, 金国藩. 光学小波包变换及其滤波器的研究 [J]. *光子学报*, 2006, **35**(7): 1076–1079.
- [7] 谢世伟, 高峰, 曾阳素, 等. 分数傅里叶变换计算全息图 [J]. *中国激光*, 2003, **30**(5): 431–434.
- [8] H M Ozaktas, D Mendlovic. Fractional Fourier Transforms And Their Optical Implementation: II [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(12): 2522–2531.
- [9] 门爱东. 数字信号处理原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [10] 赵维义, 宋菲君, 俞蕾. 光学小波变换 [J]. *物理学报*, 1999, **29**(3): 162–168.
- [11] Chui C K. An Introduction to Wavelet, An Diego, Academic [M]. San Diego: Academic Press Professional, Inc., 1992.
- [12] 樊启斌. 小波分析 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2008.
- [13] 张奇辉, 王宏, 蓝发超. 基于 Matlab 的空间滤波实验的计算机仿真 [J]. *广西物理*, 2008, **29**(1): 35–38.

(上接第 17 页)

表 2 偏振度及精度值

| 角度 | 真实值 $P_0$ (%) | 没有经过校正 $P_1$ (%) | 经过校正后 $P_2$ (%) | 绝对精度 $ P_0 - P_1 $ (%) | 绝对精度 $ P_0 - P_2 $ (%) |
|----|---------------|------------------|-----------------|------------------------|------------------------|
| 0  | 0.00          | 10.41            | 1.13            | 10.41                  | 1.13                   |
| 5  | 0.17          | 10.05            | 0.94            | 9.88                   | 0.77                   |
| 10 | 0.68          | 10.61            | 0.92            | 9.93                   | 0.24                   |
| 15 | 1.56          | 11.34            | 1.45            | 9.79                   | 0.11                   |
| 20 | 2.82          | 12.46            | 2.40            | 9.64                   | 0.42                   |
| 25 | 4.53          | 14.02            | 3.96            | 9.50                   | 0.57                   |
| 30 | 6.73          | 15.95            | 6.01            | 9.22                   | 0.72                   |
| 35 | 9.50          | 18.58            | 8.21            | 9.08                   | 1.29                   |
| 40 | 12.93         | 22.09            | 11.52           | 9.16                   | 1.41                   |
| 45 | 17.11         | 25.58            | 15.19           | 8.47                   | 1.92                   |
| 50 | 22.13         | 30.24            | 19.83           | 8.11                   | 2.30                   |
| 55 | 28.04         | 35.48            | 25.14           | 7.44                   | 2.90                   |
| 60 | 34.79         | 41.30            | 31.01           | 6.51                   | 3.78                   |
| 65 | 42.19         | 47.36            | 37.25           | 5.18                   | 4.94                   |

对校正前后的图像分别提取偏振度后发现, 经过校正的图像的偏振度的绝对误差精度明显有所提高。这种偏振 CCD 相机的非一致性校正方法可以提高图像偏振度的提取精度, 具有一定的实际意义。

### 参考文献

- [1] Walter G Egan. Polarization in Remote Sensing [C]. SPIE, 1992, **1747**: 2–48.
- [2] 张朝阳, 程海峰, 陈朝辉, 等. 偏振遥感的研究现状及发展趋势 [J]. *激光与红外*, 2007, **37**(12): 1237–1240.
- [3] 阿查姆 R M A. 椭圆偏振测量术和偏振光 [M]. 北京: 科学出版社, 1986: 44–47.
- [4] 杨伟峰, 洪津, 乔延利, 等. 无人机机载偏振 CCD 相机光机系统设计 [J]. *光学技术*, 2008, **34**(3): 469–472.
- [5] 杨伟峰, 潘玲, 洪津, 等. 多波段偏振 CCD 相机的辐射定标研究 [J]. *高技术通讯*, 2004, **14**(10): 11–15.
- [6] 胡永富, 张宇烽. 空间相机相对辐射定标精度分析 [J]. *航天返回与遥感*, 2007, **28**(4): 54–57.
- [7] Yemelyanov K. Polarization Enhanced Visual Surveillance Techniques [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Networking, Sensing, and Control. [S. l.]: IEEE Press, 2004.